

$+5\varphi$, 即 $\frac{32}{3}\pi + 5\varphi = \varphi + 12\pi$, 解得 $\varphi = \frac{\pi}{3}$; 当 $\varphi \in (\pi, 2\pi)$ 时, 如

图 2, $\sum_{i=1}^5 t_i = \varphi + (t_2 + t_3) + (t_4 + t_5) = \varphi +$

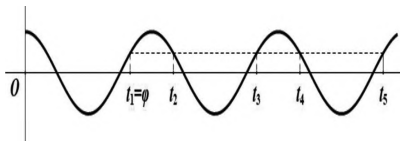


图 2

$6\pi + 10\pi = \varphi + 16\pi$, 另有 $\sum_{i=1}^5 t_i = \sum_{i=1}^5 (2x_i + \varphi) = 2\sum_{i=1}^5 x_i + 5\varphi = 2 \times \frac{16\pi}{3} + 5\varphi = \frac{32\pi}{3} + 5\varphi$, 即 $\frac{32}{3}\pi + 5\varphi = \varphi + 16\pi$, 解得 $\varphi = \frac{4\pi}{3}$. 故答案为 $\frac{\pi}{3}$ 或者 $\frac{4\pi}{3}$.

点评:借助整体代换思维将原问题转化为余弦曲线上的问题, 便于画草图进行数形结合, 再结合函数图像的对称性质, 对参数加以分类讨论, 通过参数值的方程破解问题.

3. 链接高考

(2022 年全国高考甲卷理科第 11 题) 设函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ 在区间 $(0, \pi)$ 恰有三个极值点、两个零点, 则 ω 的取值范围是().

- A. $\left[\frac{5}{3}, \frac{13}{6}\right)$ B. $\left[\frac{5}{3}, \frac{19}{6}\right)$
C. $\left(\frac{13}{6}, \frac{8}{3}\right]$ D. $\left(\frac{13}{6}, \frac{19}{6}\right]$

解析:依题意可得 $\omega > 0$, 因为 $x \in (0, \pi)$, 所

以 $\omega x + \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{3}, \omega\pi + \frac{\pi}{3}\right)$, 要使函数在区间 $(0, \pi)$ 上恰有三个极值点、两个零点, 又 $y = \sin x, x \in \left(\frac{\pi}{3}, 3\pi\right)$ 的图像如图 3 所示, 则 $\frac{5\pi}{2} < \omega\pi + \frac{\pi}{3} \leq 3\pi$, 解得 $\frac{13}{6} < \omega \leq \frac{8}{3}$, 即 $\omega \in \left(\frac{13}{6}, \frac{8}{3}\right]$. 故选 C.

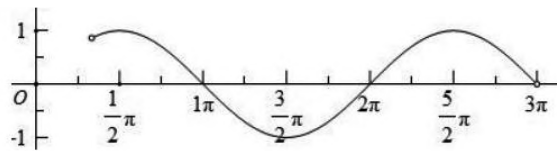


图 3

巧妙借助整体代换的思想, 将问题转化到余弦曲线上, 从而大大降低了作图难度, 便于数形结合, 得以正确求解. 这种类型题目一般难度较大, 重点考查学生应用所学知识分析和解决问题的能力. “整体代换”是解决三角函数图像性质问题的常用代数方法, 通常再搭配数形结合的思想不仅可以使问题变得简单明了、容易下手, 而且在解决问题的过程中减少了不必要的细节分析和画图的麻烦.

参考文献

- [1] 方长林. 三角函数解题中的数学思想方法[J]. 中学数学高中, 2020(2).
[2] 郝文华. 关于三角函数教学的再思考[J]. 高中数学教与学, 2018(9).

例说全概率公式与贝叶斯公式的运用

广东省惠州市第一中学 (516007) 方志平

全概率公式在新版高中数学教材中具备“承上启下”的过渡作用, 是条件概率概念的延伸, 应用的关键是对样本空间做好划分, 在表现形式上拓展了条件概率, 同时也作为贝叶斯公式成立的理论基础. 贝叶斯公式是概率论中极为重要的公式, 它以其灵活的特性与简洁的表达方式, 受到了广泛重视. 贝叶斯公式的意义在于, 根据事件的结果可以探寻引起该事件发生的原因, 即“执果求因”. 下面举例说明全概率公式与贝叶斯公式的实际运用, 供教与学参考.

1. 全概率公式与贝叶斯公式的介绍

(1) 全概率公式: 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是一组两两互斥的事件, $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$, 且 $P(A_i) > 0$,

$i = 1, 2, \dots, n$, 则对任意的事件 $B \subseteq \Omega$, 有 $P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$.

注意:①在对样本空间 Ω 的划分时, 一定要把导致事件 B (称为目标事件) 发生的所有可能性 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 全找出来, 并保证 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为两两互不相容的事件, 做到“不重不漏”. 在此基础上, 全概率公式的实质就是通过样本空间的一个合适的划分, 将一个复杂事件的概率转化为若干个简单事件的概率之和, 使复杂问题简单化. 这正是数学中常用的“化整为零”的思想.

②如果把 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 看作是引起事件 B 发生的所有可能“原因”, 那么全概率公式表明, 目标事

件 B 发生的概率实际上就是该事件在这些“原因”下的条件概率的加权平均,其中权重分别为 $P(A_i)$. 因此,全概率公式也称为“由因导果”公式.

(2) 贝叶斯公式: 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是一组两两互斥的事件, $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$, 且 $P(A_i) > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, 则对任意的事件 $B \subseteq \Omega, P(B) > 0$,

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)} =$$

$$\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^n P(A_k)P(B|A_k)}, i = 1, 2, \dots, n.$$

注意: 贝叶斯公式不同于全概率公式的是两个的侧重点不同. 贝叶斯公式主要作用是在事故产生后, 对于事故责任的划分, 体现出的是一种“问责”, 即“执果求因”.

2. 全概率公式与贝叶斯公式的运用

概率是反映随机事件出现的可能性大小的度量, 而条件概率则是在给定某事件 A 的条件下, 另一事件 B 发生的概率, 事件 A 与事件 B 的关系会影响条件概率. 全概率公式则是利用条件概率, 将复杂的事件 B 分割为若干简单事件概率的求和问题, 而贝叶斯公式则是利用条件概率和全概率公式计算后验概率.

例 1 有两只箱子, 每只都有 6 个白球 4 个红球, 现从第一只箱中任取一球放入第二只箱, 再从第二只箱中任取一球, 求取到红球的概率.

解: 假设事件 $A =$ “从第二箱中取到红球”, 在取到红球的同时, 我们要分析此时第二箱当中球的颜色状态, 所以, 可能从第一箱中取出一个白球放入第二箱, 也可能从第一箱中取出一个红球放入第二箱, 所以我们找到了事件 A 发生的原因, 事件 $B =$ “从第一箱中取出一个红球放入第二箱”, 事件 $C =$ “从第一箱中取出一个白球放入第二箱”, 这样就划分好了样本空间, 所以 $B \cup C = \Omega$. 且 $B \cap C = \varnothing$.

$$P(B) = \frac{2}{5}, P(C) = \frac{3}{5}, P(A|B) = \frac{5}{11}, P(A|C) = \frac{4}{11}.$$

根据全概率公式有 $P(A) = P(A|\Omega) = P(A|B \cup C) = P(B)P(A|B) + P(C)P(A|C) = \frac{2}{5} \times \frac{5}{11} + \frac{3}{5} \times \frac{4}{11} = \frac{2}{5}$. 故取到红球的概率为 $\frac{2}{5}$.

评注: 由上述解法可以看出, 应用的关键就是“执果索因”, 即先找到事件 A 发生的原因, 在寻找原因的时候, 要把原因拆分成为互斥的事件 B 与 C , 掌握了这个原理, 对全概率公式的理解就会有更深

一步的认识, 而不是仅仅停留在记忆公式的层面.

例 2 两箱产品, 第一个箱子里面装有 10 个合格品和 40 个次品, 第二个箱子里面装有 18 个合格品和 12 个次品, 随机挑中两个箱子中的一个并随机拿出两个产品, 如果第一次拿出的是合格产品, 问抽到的是第一箱的概率为多少?

解: 设事件 $B_i =$ “抽到的是第 i 箱”, $i = 1, 2$. $A_j =$ “第 j 次拿出的东西是合格产品”, $j = 1, 2$.

$$P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}, P(A_1|B_1) = \frac{10}{10+40} = \frac{1}{5},$$

$$P(A_1|B_2) = \frac{18}{12+18} = \frac{3}{5}.$$

根据全概率公式得 $P(A_1) = P(B_1)P(A_1|B_1) + P(B_2)P(A_1|B_2) = \frac{2}{5}$. 根据贝叶斯公式得

$$P(B_1|A_1) = \frac{P(A_1B_1)}{P(A_1)} = \frac{P(B_1)P(A_1|B_1)}{P(A_1)} = \frac{1}{4}.$$

评注: 本题的难点是将实际问题转化为数学模型, 需要我们读懂题意, 合理设出事件, 用数学符号准确表示事件. 要弄清第一次拿到的东西是合格品, 可能是来自第一箱, 也可能是来自第二箱, 利用全概率公式求出 $P(A_1)$. 再用贝叶斯公式求出第一次拿出的是合格产品, 是来自第一箱的概率 $P(B_1|A_1)$.

例 3 某玩具制造厂所用的遥控飞机零件, 是由 5 家不同的玩具零件制造厂提供的, 我们根据以往的数据分析得以下数据: 一厂的零件次品率为 0.01, 二厂的零件次品率为 0.02, 三厂的零件次品率为 0.02, 四厂的零件次品率为 0.01, 五厂的零件次品率为 0.03. 而它们所提供的零件份额: 一厂的份额是 0.2, 二厂的份额是 0.2, 三厂的份额是 0.3, 四厂的份额是 0.2, 五厂的份额是 0.1. 已知在玩具厂的零件储藏室里, 由这四家玩具零件制造厂提供的飞机零件的离合器, 是均匀的混在一起放置的, 而且在外观上看没有任何区别.

(1) 随机在储藏室里取一个离合器, 求此离合器为次品的概率;

(2) 随机在储藏室里取一个离合器, 若取到的离合器是一件次品, 请分析此次品出自何厂的几率最大?

解: (1) 设事件 $A =$ “取到的是次品”, 事件 $B =$ “取到的产品是第 i 家玩具零件制造厂提供的” ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), 则 $P(B_1) = 0.2, P(B_2) = 0.2, P(B_3) = 0.3, P(B_4) = 0.2, P(B_5) = 0.1. P(A|B_1) = 0.01, P(A|B_2) = 0.02, P(A|B_3) = 0.02,$

$$P(A|B_4) = 0.01, P(A|B_5) = 0.03.$$

由全概率公式可得 $P(A) = \sum_{i=1}^5 P(B_i)P(A|B_i)$
 $= 0.2 \times 0.01 + 0.2 \times 0.02 + 0.3 \times 0.02 + 0.2 \times$
 $0.01 + 0.1 \times 0.03 = 0.017.$

$$(2) \text{ 由贝叶斯公式得 } P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)} = \frac{0.2 \times 0.01}{0.017} = \frac{2}{17}, P(B_2|A) = \frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)} = \frac{0.2 \times 0.02}{0.017} = \frac{4}{17}, P(B_3|A) = \frac{P(B_3)P(A|B_3)}{P(A)} = \frac{0.3 \times 0.02}{0.017} = \frac{6}{17}, P(B_4|A) = \frac{P(B_4)P(A|B_4)}{P(A)} = \frac{0.2 \times 0.01}{0.017} = \frac{2}{17}, P(B_5|A) = \frac{P(B_5)P(A|B_5)}{P(A)} = \frac{0.1 \times 0.03}{0.017} = \frac{3}{17}.$$

故(1)随机在储藏室里取一个离合器,此离合器为次品的概率为 0.017; (2)这个次品出自三厂的可能性最大.

评注:本题求解思路是:(1)按照确定的标准,将一个复杂事件分解为若干个两两互斥事件 $B_i (i = 1, 2, \dots, 5)$; (2)依题意得出 $P(B_i)$ 和事件 A 在各个互斥事件 B_i 发生条件下的概率 $P(A|B_i)$; (3)代入全概率公式 $P(A) = \sum_{i=1}^5 P(B_i)P(A|B_i)$, 计算 $P(A)$;

(4)利用贝叶斯公式 $P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}$, 依次求出 $P(B_i|A) (i = 1, 2, \dots, 5)$.

例 4 假定小明去参加数学夏令营,选择乘火车、轮船、汽车、飞机的概率分别为 0.3, 0.2, 0.1, 0.4, 若他乘火车、轮船、汽车迟到的概率分别为 0.2, 0.3 和 0.5, 而乘飞机则不会迟到. 结果他迟到了, 那么他是乘火车去参加数学夏令营的概率是多少?

解:设事件 $B =$ “小明迟到了”, $A_1 =$ “小明乘火车参加夏令营”, $A_2 =$ “小明乘轮船参加夏令营”, $A_3 =$ “小明乘汽车参加夏令营”, $A_4 =$ “小明乘飞机参加夏令营”. 显然 A_1, A_2, A_3, A_4 构成了一个完备的事件组合, 于是有: $P(A_1) = 0.3, P(A_2) = 0.2, P(A_3) = 0.1, P(A_4) = 0.4, P(B|A_1) = 0.2, P(B|A_2) = 0.3, P(B|A_3) = 0.5, P(B|A_4) = 0$. 由贝叶斯公式得

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{j=1}^4 P(A_j)P(B|A_j)} = \frac{6}{17}. \text{ 所}$$

以小明乘火车去参加数学夏令营的概率是 $\frac{6}{17}$.

评注:本题实质上是利用全概率公式, 先求小明迟到的概率 $P(B)$, 在迟到的前提下由贝叶斯公式求小明因迟到而乘火车参加夏令营的概率 $P(A_1|B)$.

例 5 某厂有一、二、三共三个车间, 生产同种产品, 总产量中三个车间所占的比例分别是 60%、25% 及 15%, 三个车间所生产产品的次品率分别为 6%、8% 及 12%, 从该厂产品中任意抽取一件产品, 取到的恰好是次品, 视次品来自一或二或三车间, 能被修复成正品的概率分别为 0.8, 0.5, 0.3, 求此次品能被修复成正品的概率是多少?

解:设事件 $A_i =$ “抽取的产品来自第 i 个车间”, $i = 1, 2, 3$. $B =$ “所抽产品为次品”, $C =$ “能被修复成正品”. 则 $P(A_1) = 0.6, P(A_2) = 0.25, P(A_3) = 0.15. P(B|A_1) = 0.06, P(B|A_2) = 0.08, P(B|A_3) = 0.12, P(C|A_1B) = 0.8, P(C|A_2B) = 0.5, P(C|A_3B) = 0.3$. 由全概率公式, $P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) = 0.6 \times 0.06 + 0.25 \times 0.08 + 0.15 \times 0.12 = 0.074$.

结合贝叶斯公式, $P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)} (i = 1, 2, 3)$, 于是有 $P(C|B) = \sum_{i=1}^3 P(A_i|B)P(C|A_iB) = \frac{0.6 \times 0.06}{0.074} \times 0.8 + \frac{0.25 \times 0.08}{0.074} \times 0.5 + \frac{0.15 \times 0.12}{0.074} \times 0.3 \approx 0.597$. 故此次品能被修复成正品的概率约是 0.597.

评注:首先要理解来自第 i 车间的次品被修复成正品的概率是 $P(C|A_iB) (i = 1, 2, 3)$, 其次要结合贝叶斯公式及概率的加权平均, 方可求出结果.

综上, 全概率公式包含了事件的并与互不相容的概念, 还包括着加法、乘法公式, 条件概率公式, 而贝叶斯公式则是根据全概率公式推演化而来的. 全概率公式与贝叶斯公式是两个相辅相成的互逆的运算公式, 它对解决实际生活中的概率问题起着很重要的作用, 在我们生活中的应用也相当广泛, 灵活掌握全概率公式与贝叶斯公式, 可以帮助中学生拓宽视野, 提高数学思维能力和探究未知世界的兴趣.