基于核心素养的高中数学课时作业设计实践
——以“复数乘、除运算的三角表示及其几何意义”为例

周　宁[1]，林新建[2]

(1.福建师范大学附属福清德旺中学，福建 福清　350000；
2.福清市教师进修学校，福建 福清　350000)

摘　要:基于核心素养的课时作业注重基础知识的巩固与理解,注重思想方法的提炼与应用,注重核心素养的培养与提升.基于对新课程改革的理解,以“复数乘、除运算的三角表示及其几何意义”的课时作业分享实践过程与心得,以期引导高中数学教师精心设计课时作业,将培养核心素养落在实处.

关键词:核心素养;课时作业;作业设计;三角表示

作业是学生巩固所学数学知识、技能和思想方法的必要途径,也是评价教师教学质量、学生学习效益的重要手段[1].其中课时作业作为学生最经常完成的作业形式,意义更为重要.不能体现课标、教材及学情“三位一体”的作业布置,无论是对学生核心素养的培养还是教师的专业成长都是不利的.本文拟通过 2019 人教 A 版必修第二册(以下简称教材)“7.3.2 复数乘、除运算的三角表示及其几何意义”课时作业的设计实践,谈谈个人的思考与体会.

1　课时作业设计实践

1.1　课标及教材分析

“复数乘、除运算的三角表示及其几何意义”是第七章“复数”第三节“复数的三角表示”的第二个内容,其中“复数的三角表示”为新增内容,也是标注“*”的选学内容.普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)(以下简称课标)对本节内容的要求是“通过复数的几何意义,了解复数的三角表示,了解复数的代数表示与三角表示之间的关系,了解复数乘、除运算的三角表示及其几何意义”[2].从课标中的关键词“了解”可以看出这节内容的要求不高,但是一旦选学,也应列为教学重点,“了解”程度要提升为“理解”.这是因为复数乘、除运算的三角表示不仅形式简洁,给复数的乘、除运算带来了便利,而且具有鲜明的几何意义,其几何意义就是平面向量的旋转和伸缩变换.借助复数乘、除运算三角表示的几何意义,可以将一些复数、三角和平面几何问题转化为向量问题去解决.因此,复数乘、除运算的三角表示及其几何意义在本单元中具有重要地位.它不仅沟通了复数与平面向量、三角函数等知识的联系,让学生体会到几何与代数之间的密切关系,也为今后在大学期间学习复数的指数形式、复变函数论等高等数学知识奠定基础,具有承前启后的作用.

习题(包含例题、练习、习题)是教材的重要组成部分,可以帮助学生实践运用新知识,同时获得能力和学科核心素养的提升,也是教师开展教学评价的重要资源.对教材习题进行研究,能更好地在作业设计中落实核心素养.喻平教授在文[3]中指出对教材习题分析时应重点关注习题所体现的数学核心素养类型及相应素养所处的水平.

通过对教材 P89-P92 的习题分析,可以将习题的设计意图归结为以下几类:①以复数的三角形式为载体,考查复数乘、除运算的三角表示的掌握程度,培养数学运算素养,如例 3、例 5、练习第 1 题、习题 7.3 第 3 题等,这些习题对运算求解能力要求不高,处于数学运算素养水平一;②以复数的三角形式、代数形式为载体,考查复数乘、除运算的三角表

收稿日期:2022-11-16
基金项目:福建省教育科学“十四五”规划 2021 年度课题《基于核心素养的农村校高中数学校本作业设计研究》(课题编号:Fjjgzx21-327).
作者简介:周宁(1985—),男,福建福州人,大学本科,中学一级教师.
林新建(1969—),男,中学正高级教师,特级教师.

示的掌握程度，培养逻辑推理、数学运算素养，如习题 7.3 第 4 题(2)(4)，第 5 题等，与前面不同的是，这些习题的求解需要先将复数的代数形式转化为三角形式，再通过复数乘、除运算的三角表示解决问题，学生也可以将复数的三角形式转化为代数形式进行求解，但显然运算效率降低很多，因此这些习题也考查数学运算素养，但更侧重于考查学生的逻辑推理素养，在课堂教学时教师理应都让学生体会过这两种方法的计算效率，故这些习题对逻辑推理、数学运算素养的考查也只处于水平一；③能够利用复数乘法运算的三角表示解决一些代数问题，考查逻辑推理、数学运算素养，如“探究与发现 1 的 n 次方根”，要求学生能够根据代数问题的结构特征，联想到复数三角表示的结构特征，从而运用复数乘法运算的三角表示求解出 1 的 n 次方根，对逻辑推理、数学运算素养的考查都处于水平二；④考查复数乘、除运算三角表示的几何意义解决复数、平面几何问题的掌握程度，培养逻辑推理、直观想象、数学运算素养，如例 3、例 4、习题 7.3 第 8、9、10 题，其中例 3 是解释两个三角形式复数的乘法的几何意义，例 4、第 8 题就是理解复数乘、除运算三角表示的几何意义解决复数问题，这些习题对直观想象、数学运算素养的考查处于水平一，而第 9、10 题要求理解复数乘、除运算三角表示的几何意义解决平面几何问题，这对学生的直观想象、逻辑推理素养提出了更高的要求，要求学生理解复数乘、除运算三角表示的几何本质就是旋转、伸缩变换，涉及到角的变换，因此平面几何中与角有关的问题可以借助复数乘、除运算三角表示进行求解，所以第 9、10 题对直观想象、逻辑推理素养的考查处于水平二.

1.2　学情分析

在本节内容之前，学生已经学习了复数的三角表示，并熟悉了平面向量、复数以及坐标平面内的点之间的一一对应关系，对三角恒等变换有一定的处理能力，通过复数乘、除运算的代数形式推导得出应用复数乘、除运算的三角表示不会存在太大的困难.但是学生普遍抽象能力、运用数形结合思想建构几何与三角的关系的能力偏弱，因此从复数乘、除运算的三角形式的代数结构抽象出几何意义并进一步应用，会存在较大的问题.此外，复数的加、减运算的几何意义是平面向量的加、减运算，为什么乘、除运算的几何意义不能用向量的运算解释？同时，对复数乘、除运算的三角表示及其几何意义的理解水平，也关系着能否解决三角、平面向量以及平面几何中的问题.这些都是学生在解决作业中会遇到的困难.

1.3　课时作业目标分析

作业目标不等同于教学目标.教学目标是对课程标准给定的“内容要求＋学业要求”进行“目标解析”，也就是对其中的“了解”“理解”“掌握”以及“经历”“体验”“探究”等的含义作出解析，给出学生在学完本单元后“四基”“四能”上应达到的要求，格式为“通过(经历)X，能(会)Y，发展(提高、体会)Z”，其中 X 表示数学活动过程，Y 表示应会解决的问题(显性目标，主要是具体知识点目标)，Z 表示数学思想和方法、数学关键能力(隐性目标)[4].作业目标也是对课程标准给定的“内容要求＋学业要求”进行“目标解析”，只不过解析的目标是学生要掌握的核心知识以及通过核心知识的应用要培养的思想方法和关键能力.借鉴教学目标的格式，可以将作业目标的格式定为“能(会)X，培养 Y，发展(提高、体会)Z”，其中 X 表示核心知识，Y 表示数学思想和方法，Z 表示关键能力.也就是，作业目标和教学目标解析的对象都是课程标准，不同之处在于教学目标要解析核心知识(显性目标)的获得过程，作业目标要解析核心知识的应用并发展思想方法和关键能力(隐形目标).

通过对课标及教材的分析，可以确定本课时作业目标为：能应用复数乘、除运算的三角表示进行简单的运算和证明，培养化归与转化思想，发展推理论证和运算求解能力；能利用复数乘、除运算三角表示的几何意义解决与复数、三角或平面向量有关的问题，培养化归与转化、数形结合思想，发展推理论证、运算求解和直观想象能力.

1.4　课时作业内容设计

1.4.1　结构设计

本课时作业结构遵循教材习题栏目(“复习巩固”、“综合应用”、“拓广探索”)的设计，同时做了个创新，增加新的栏目“数学思考”.这四个栏目突出基础性和发展性，既有对基础知识和基本能力的检测，又重视基本思想、基本活动经验的考查，更关注学生思维能力的发展.其中“复习巩固”主要体现基础性，考查学生对基本知识、基本技能的掌握，考查学生是

否达到核心素养水平一；“综合应用”主要体现综合性、应用性、创新性，考查学生是否能够运用不同知识、思想方法，多角度观察、思考、分析和解决问题，考查学生是否达到核心素养水平一、水平二；“拓广探索”主要体现综合性、应用性、创新性，考查学生是否具有创新性思维，是否能够灵活运用知识分析和解决问题，考查学生是否达到核心素养水平二、水平三；“数学思考”主要体现综合性、应用性、创新性，以问题情境激发学生的数学思考，让学生明白思考什么、如何思考，深化对核心知识和思想方法的理解，考查学生是否达到核心素养水平二、水平三.

1.4.2 内容呈现

A. 复习巩固

(1)式子 $3(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3})\times3(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6})$的值为(　　).

(A)9　　(B)9i

(C)$\frac{9\sqrt{3}}{2}+\frac{9}{2}\mathrm{i}$　　(D)$\frac{9}{2}+\frac{9\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

(2)复数 $\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}$ 的一个平方根是(　　).

(A)$\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}$　　(B)$\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}$

(C)$\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}$　　(D)$\cos\frac{2\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}$

(3)已知 $z_1=\sqrt{2}(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3})$，$z_1$ 对应的向量为$\overrightarrow{OZ_1}$.

①若 $z_2=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$，z_1z_2 所对应的向量为$\overrightarrow{OZ}$，则 z_1z_2 的几何解释是(　　).

(A)把$\overrightarrow{OZ_1}$绕点 O 按顺时针方向旋转$\frac{\pi}{3}$，再将其长度伸长为原来的2倍，这样得到向量$\overrightarrow{OZ}$

(B)把$\overrightarrow{OZ_1}$绕点 O 按顺时针方向旋转$\frac{\pi}{6}$，再将其长度缩短为原来的$\frac{1}{2}$，这样得到向量$\overrightarrow{OZ}$

(C)把$\overrightarrow{OZ_1}$绕点 O 按逆时针方向旋转$\frac{\pi}{3}$，再将其长度伸长为原来的2倍，这样得到向量$\overrightarrow{OZ}$

(D)把$\overrightarrow{OZ_1}$绕点 O 按逆时针方向旋转$\frac{\pi}{6}$，再将其长度缩短为原来的$\frac{1}{2}$，这样得到向量$\overrightarrow{OZ}$

②若将$\overrightarrow{OZ_1}$绕点 O 按顺时针旋转$\frac{\pi}{2}$，得到向量$\overrightarrow{OZ'}$，则$\overrightarrow{OZ'}$对应的复数为______.

(4)计算下列各式，并把结果化为代数形式：

①$2(\cos75°+\mathrm{i}\sin75°)\times(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i})=$______；

②$(4\cos300°+\mathrm{i}\sin300°)\div[\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4})]=$______.

(5)已知 $z_1=-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$，请写出一个使得 z_1z_2 运算结果是纯虚数的复数 z_2：______.

(6)①求证：$\frac{1}{\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta}=\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta$；

②写出下列复数 z 的倒数$\frac{1}{z}$的模与辐角：

(ⅰ)$z=4(\cos\frac{\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12})$

(ⅱ)$z=\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}$

(ⅲ)$z=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})$.

B. 综合运用

(7)由复数乘法的三角表示可以得到

$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^2=\cos2\theta+\mathrm{i}\sin2\theta$，

又$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^2=\cos^2\theta+(2\sin\theta\cos\theta)\mathrm{i}+(\mathrm{i}\sin\theta)^2$

$=\cos^2\theta-\sin^2\theta+\mathrm{i}(2\sin\theta\cos\theta)$，

所以 $\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$，$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$，即二倍角公式.

你能仿照以上方法推导正弦、余弦的三倍角公式，并用 $\sin\theta$ 表示 $\sin3\theta$，$\cos\theta$ 表示 $\cos3\theta$ 吗？

(8)求方程 $x^3=1$ 的三个复数根，并说明它们之间的几何关系.

C. 拓广探索

(9)①如图1，复平面内的△ABC 是等边三角形，它的两个顶点 A，B 的坐标分别为(1,0)，(2,1)，求点 C 的坐标.

②已知对任意平面向量$\overrightarrow{AB}=(x,y)$，若将$\overrightarrow{AB}$绕其起点沿逆时针方向旋转 θ 角得到向量$\overrightarrow{AP}$，求$\overrightarrow{AP}$ 的坐标.

(10)如图2，已知平面内并列的三个全等的正

方形.

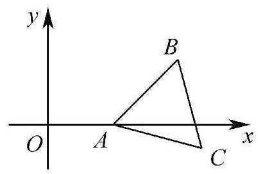

图 1

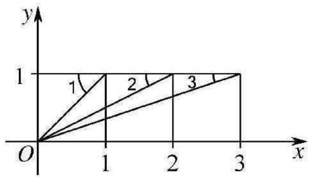

图 2

①利用复数证明：$\angle 1+\angle 2+\angle 3=\frac{\pi}{2}$.

②你能用其他的方法证明(1)中的结论吗？

D. 数学思考

(11)我们知道，复数就是向量，二维向量可看作复数. 但是向量 a 满足 $a^2=|a|^2$，复数 z 不满足 $z^2=|z|^2$. 你能解释上述问题的原因吗？

1.4.3　设计说明

(1)设计递进式习题，考查素养发展水平

本课时作业以 4 个栏目呈现对学生素养及水平的考查，同时考查同一核心知识的数学思维要求也不尽相同. 这样可以让作业设计更具指向性和适切性，实现所有学生共同发展. 例如题 1、2、4、5、6 侧重考查学生数学运算素养水平，题 1 是正面考查复数乘、除运算的三角表示，题 2 需要逆向思维，题 4、5、6 需要化归与转化思维. 题 5 还可以考查特殊化思维以及数形结合思想，若学生能够利用复数乘法三角表示的几何意义以及纯虚数辐角的特殊性发现 z_2 的辐角满足 $\frac{5\pi}{6}+k\pi, k\in \mathbf{Z}$，即

$$z_2=r\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}+k\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{6}+k\pi\right)\right),$$

那么说明其直观想象素养水平达到水平二的要求.

(2)设计关联性习题，增强建构知识能力

零散孤立的习题不利于学生建构数学知识的内在联系. 因此设计习题要注重前后之间的关联，让学生能够进行合理整合，将思维从“离散”转向“聚合”，有助于提升核心素养的水平. 如题 2、7，实际上都是为题 8 服务的，学生通过题 2、7 的完成有助于开拓题 8 的解题思路. 题 9、10 在教材原题的基础上多设计一问，其中题 9 的第二问是第六章“平面向量及其应用”习题 6.4 题 11 的背景知识(没有给出推导)，题 10 的第二问希望学生能够从三角及平面几何的角度再予以证明. 题 11“数学思想”是通过比较复数与平面向量及其运算的异同，使学生能够理解数学对象及运算的本质. 学生若能完成以上问题的求解，对复数三角表示的乘、除法及几何意义的理解会达到一个更高的水平，对复数与三角、平面向量的联系性认识会更为深刻.

2　课时作业设计反思

2.1　素养要求在课标、教材

数学核心素养是以核心知识为载体. 旨在落实核心素养的作业设计，应深度理解核心知识所在的体系与结构，站在学科的高度、单元整体的角度整体把握数学内容. 要明确课标要求，把课标要求落实到作业目标的设定、习题情境的设置；要理解教材内涵，剖析应掌握的核心知识以及核心知识的应用所要培养的数学思想方法以及核心素养的类型和水平. 只有深入理解课标教材，才能把握好作业设计的方向，有效落实考查要求.

2.2　素养培养在情境

作业落实核心素养体现在试题情境. 习题要体现核心知识与数学本质. 习题情境的设置，要能够让学生在掌握知识技能的同时，感悟数学的思想，积累数学思维的经验，提升核心素养. 好的问题要涉及学科观念、学科思想、学科思维方式，能帮助学生提高对学科精神、学科文化的领悟和理解[5]. 试题情境的构建，可以从教材习题中学习，也可以借鉴高考真题，但都不应超过学生目前的知识能力水平. “跳一跳就够得着”的作业才能激发学生高质量完成作业的兴趣和热情，落实培养核心素养的任务.

2.3　素养评价在过程

课标指出日常评价与考试要根据学生的学习规律，对于重要的概念、结论和应用的评价，要循序渐进，不要一步到位[2]. 因此在评价学生核心素养的发展程度时，不是简单看完成的对错，而是以完成的过程来进行评价. 通过分析学生的解题思路，可以评价是否达成相应的素养，不同的解题方法对素养的要求是可以不同的；通过分析学生的完成程度，可以评价是否达成相应素养的水平. 因此，在作业要求中，

(下转第 67 页)

数学教学,2018(1):45-48.
[3] 许如意,陈清华.关于数学教学有效使用信息技术的思考[J].数学通报,2015,54(05):35-36+41.

(上接第17页)

(5)从知识范围上看,函数、几何与代数、概率与统计领域占比均大于20%,预备知识、数学建模活动与数学探究活动领域占比都低于10%.跨学科内容在知识范围的各领域分布不均衡.

3.2 建议

教材是教学的重要依据,研读教材对教师而言尤为重要,教师对教材的熟悉程度不仅会对教学过程产生影响,更会直接决定教学效果的好坏.本文通过对苏教版必修教材中跨学科内容的分析,为教材编写和教师教学提出三点建议:

(1)改善跨学科内容的比例

在数学教材编写中要多涉猎学科来源中医药科学类、呈现位置中章前言等、呈现方式中图表形式等占比较少的跨学科知识,目的是使教材中的跨学科内容在结构上更合理.

(2)提高跨学科内容的深度

加强数学教师与其他学科教师在教材编写和教学设计过程中的沟通与交流,打破学科壁垒,促进学科之间的深度融合.此外,要多重视不同学科间思维方法的交叉应用.

(3)拓宽跨学科内容的广度

增加学科来源中一级学科门类,如人工智能、大数据技术等,目的是使教材中跨学科内容的范围更广.此外,在教材编写中需增加专栏的种类,如数学活动设计、举一反三、数学建模与探究等,既体现了跨学科内容的实践性,又增加了多样性.

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2020年修订版)[S].北京:人民教育出版社,2020.
[2] 张维忠,赵千惠.澳大利亚初中数学教科书中的跨学科内容[J].浙江师范大学学报(自然科学版),2022,45(02):234－240.
[3] 朱树金.中美高中数学教材跨学科内容比较研究[J].中学数学月刊,2020(08):47－50.
[4] 包智慧,杨新荣.初中数学教科书跨学科内容的变迁分析——基于四套人教版教科书的纵向比较研究[J].中学数学杂志,2021(10):8－12.
[5] 宋燕伶,彭刚.北师大版高中数学教材跨学科内容研究[J].中学数学杂志,2022(01):6－10.
[6] 潘小勤,张维忠.高中数学教材中跨学科内容的呈现——以新人教A版高中数学必修教材为例[J].中学数学教学参考,2020(13):31－34.

(上接第23页)

要明确提出客观题也需要写出必要的解题步骤,否则只看客观题的结果是无法准确评价学生素养是否达成以及达成的水平.

3 结语

新修订的课程方案要求“坚持素养导向”,课程建设以培养学生的核心素养为方向、为目标.作业是保证课程改革成功的关键领域,是促进核心素养发展的重要手段.作为一线的高中数学教师,应深入作业设计研究,把作业设计能力作为教师的基本功,在学习、实践、反思中设计出高质量的作业,让作业真正发挥其育人的功能.

参考文献

[1] 张永超.基于核心素养落实的作业设计及其价值辨析[J].中学数学教学,2022,1:4-8.
[2] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[M].北京:人民教育出版社,2020.
[3] 喻平.核心素养指向的数学作业设计[J].数学通报,2022,61(5):1-7,12.
[4] 章建跃.为什么说“三维目标”已经“过时”[J].中小学数学(高中版),2021,Z1:封底,124.
[5] 刘祖希.访史宁中教授:谈数学基本思想、数学核心素养等问题[J].数学通报,2017 ,56(5):1-5.