



基于 2020 年高考试题赏析平面向量科学备考新指向

■广东省中山市桂山中学 余铁青

向量是历年高考的必考知识模块。从题型上看,今年的高考题主要以选择题、填空题为主,考查同学们的数学运算素养、逻辑推理素养、直观想象素养等。对知识迁移运用能力有一定要求,是典型的运用代数方法解决几何问题。从考查知识点来看,主要考查向量的坐标运算、向量的几何意义、向量的模、向量的数量积、平行与垂直的几何关系、向量与三角形的关系等。本文结合 2020 年各地高考题,对此进行实例分类赏析。

一、实例赏析

1. 考查向量的坐标运算

例 1 (2020 年高考全国 I 卷理 15) 已知点 $A(x, 0), B(-1, 3), C(3, 4), D(5, 6)$ 满足 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$, 若 $\overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$, 则 $10\lambda + 5\mu =$ _____。

解析: 由题意知 $\overrightarrow{AB} = (-1-x, 3), \overrightarrow{CD} = (2, 2)$, 因为 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$, 所以 $-2-2x+6=0$, 解得 $x=2$, 由 $\overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$, 可得

$$\begin{cases} 3 = -3\lambda + \mu, \\ 6 = 3\lambda + 4\mu, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} \lambda = -\frac{2}{5}, \\ \mu = \frac{9}{5}, \end{cases} \text{ 所以 } 10\lambda + 5\mu = 5.$$

评注: 该题不仅考查了同学们的坐标线性运算能力, 也对基底的概念进行了侧面考查, 运算时只要细心即可解决问题。

2. 考查向量模的运算

例 2 (2020 年高考全国 II 卷理 13) 已知单位向量 a, b 的夹角为 45° , $ka-b$ 与 a 垂直, 则 $k =$ _____。

解析: 由 $(ka-b) \cdot a = 0 \Rightarrow k|a|^2 - |a| \cdot |b| \cos 45^\circ = 0$, 将 $|a| = |b| = 1$ 代入可得 $k = \sqrt{2}$ 。

评注: 该题由垂直关系再结合数量积即

可处理。

3. 考查向量的数量积

例 3 (2020 年高考全国 III 卷理 6) 已知向量 a, b 满足 $|a| = 5, |b| = 6, a \cdot b = -6$, 则 $\cos \langle a, a+b \rangle =$ ()。

- A. $-\frac{13}{35}$ B. $-\frac{19}{35}$
C. $\frac{17}{35}$ D. $\frac{19}{35}$

解析: $|a+b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2ab = 49 \Rightarrow |a+b| = 7$, 所以 $\cos \langle a, a+b \rangle = \frac{a \cdot (a+b)}{|a| \cdot |a+b|} = \frac{a^2 + a \cdot b}{|a| \cdot |a+b|} = \frac{25-6}{5 \times 7} = \frac{19}{35}$ 。

评注: 该题对同学们运用数量积公式的要求相对高一些, 因为涉及常说的“平方法”求第一次模, 数量积求第二个模。考试中有部分同学对 $\cos \langle a, a+b \rangle$ 理解不清楚, 也会直接导致错误。

4. 考查以向量为背景的不等式

例 4 (2020 年高考浙江卷 17) 设 e_1, e_2 为单位向量, 满足 $|2e_1 - e_2| \leq \sqrt{2}$, $a = e_1 + e_2, b = 3e_1 + e_2$, 设 a, b 的夹角为 θ , 则 $\cos^2 \theta$ 的最小值为 _____。

解析: 由 $|2e_1 - e_2| \leq \sqrt{2}$ 两边同时平方得 $4 - 4e_1 \cdot e_2 + 1 \leq 2 \Rightarrow e_1 \cdot e_2 \geq \frac{3}{4}$, 所以 $\cos^2 \theta$

$$= \frac{(a \cdot b)^2}{a^2 \cdot b^2} = \frac{(4 + 4e_1 \cdot e_2)^2}{(2 + 2e_1 \cdot e_2)(10 + 6e_1 \cdot e_2)} = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{2}{5 + 3e_1 \cdot e_2} \right) \geq \frac{4}{3} \left(1 - \frac{2}{5 + 3 \times \frac{3}{4}} \right) = \frac{28}{29}。$$

评注: 利用向量的平方等于模的平方化简条件得 $e_1 \cdot e_2 \geq \frac{3}{4}$, 再根据向量夹角公式求 $\cos^2 \theta$ 的函数关系式, 根据函数的单调性求最值, 难度中等。

5. 向量迁移到几何轨迹

例 5 (2020 年高考全国 III 卷文 6) 在平面内, A, B 是两个定点, C 是动点. 若 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 1$, 则点 C 的轨迹为().

- A. 圆 B. 椭圆
C. 抛物线 D. 直线

解析: 由 A, B 是两个定点, 不妨设 $AB = 2a (a > 0)$, 则 $A(-a, 0), B(a, 0)$; 而 C 是动点, 设 $C(x, y)$, 于是 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = (x+a) \cdot (x-a) + y^2 = 1$, 整理得 $x^2 + y^2 = a^2 + 1$, 它表示的是一个圆.

评注: 向量与轨迹结合也算较为常规, 关键点在于如何准确建系给定坐标, 再结合坐标运算求出动点的几何关系, 对同学们的理解迁移能力有一定要求, 要能够准确建立数量关系.

二、2021 届向量一轮复习思考

1. 紧跟老师步伐, 与同学多交流, 做到准确把握向量复习方向

俗话说: “选择比努力更重要”, 笔者想说的是“紧跟老师复习节奏比自己盲目刷题更重要”. 一轮复习可以说是一次彻底的大规模基础知识的回顾, 该准确把握哪些重点, 哪些难点, 哪些要求掌握, 哪里只要理解, 同学们都需要明确. 因为老师能够根据高考数学考纲等指导性文件, 结合教学经验准确判断 2021 年高考向量板块的考查风向标, 能够做到对授课例题进行有效甄选, 确定出重点复习方向, 精讲精练, 做到有的放矢. 三人行必有我师焉, 多与同学交流有助于横向对比自己所掌握的情况, 能够较为直接反馈实际学习水平.

2. 复习过程中切实做到回顾教材

研究证明, 高考越来越重视教材的地位和作用, 高考题来源于哪里? 一部分是随着社会发展演变更新产生一些创新性试题, 而这些试题很多都是来源于教材例题的改编. 今年高考对向量的考查基本都是基础概念的略微延伸, 抓住此部分基础题型, 运用数学基本概念、运算、性质就能轻松应对. 那 2021 年的高考向量问题会不会出现类似的情况呢? 所以在日常的学习中, 与同学结成小组钻研教材, 争取吃透教材里面的每一道题, 摸清这些题的考查意图, 考查的是什么知识点, 自我反

思总结, 查漏补缺, 方可自由应对向量试题.

3. 根据题型、分值和自身实际情况控制练习难度

2020 年高考向量试题全部以选择题、填空题的形式出现, 主要考查同学们对平面向量的加减运算、坐标表示、数量积等知识的掌握情况, 还有就是与轨迹问题结合在一起, 相对于前面的来说难度略升, 但整体上这类试题应该属于简单题. 从题型和分值角度看, 后面的考试应该是会延续这种题型和分值, 这是高考平面向量命题的一种基本趋向, 毕竟高中的主干思维还是在函数. 近年来的向量试题难度整体不大, 那么一轮复习在着重夯实基础之上, 练习题难度控制应该不宜太大, 结合自身理解水平, 适当练习巩固.

4. 夯实解题基本套路, 掌握常规解题技能

2020 年的向量试题, 虽说没有很多偏题怪题了, 但是现在的高考题型多变, 同学们要注意到多模块知识的融合与串联, 很多试题并不都是孤立的存在, 要注意向量试题与其他相关知识的内在联系. 通过解题, 必须掌握基本解题套路. 要知道每年的高考是有相当部分的基础题, 通常来说这些题只要掌握套路, 有一定知识储备都能够游刃有余地应对. 很多可以说在平时训练中都见过甚至做过十分类似的题型, 那么基础知识的积累就是十分有必要了. 一方面, 不需要过于追求所谓的高难度题型; 另一方面, 常规题型的解答套路有必要系统性地掌握, 形成通性通法. 因为任何难题本质上都是若干问题的组合, 所以对基础知识和常见套路的掌握是有必要的.

5. 复习中注重分析揣摩命题意图

笔者认为同学们在复习向量这块内容时应注重区分代数法与几何法, 以及分类讨论、数形结合、函数等思想的灵活运用. 但如何巧妙使用这些思维方法来有效解决向量问题? 一定要去尝试分析命题人究竟考查我们的什么素养, 考查相关的什么能力. 透过试题看本质, 透过现象看本质的良好思维分析习惯会帮助我们一生.

(责任编辑 王福华)

经典题突破方法

- 26 一题可破万重山——谈向量问题处理之“道” 马志伟
- 29 多视角突破三角函数的图像和性质 任海涛
- 31 2020 年高考解三角形经典问题聚焦 邵丽霞
- 32 2020 年高考平面向量经典问题聚焦 朱萍
- 33 2020 年高考“三角函数及三角变换”经典问题聚焦 陈明朋
- 34 2020 年高考数列经典问题聚焦 袁山人

演练篇

核心考点 AB 卷

- 37 三角函数、平面向量、数列测试题 A 陶兴红
- 39 三角函数、平面向量、数列测试题 B 湛永斌

核心考点 AB 卷参考答案

- 42 三角函数、平面向量、数列测试题 A 参考答案
- 45 三角函数、平面向量、数列测试题 B 参考答案



封面人物

余铁青,男,江西景德镇人,硕士研究生学历,高中数学一级教师,就职于广东省中山市桂山中学。在《中国数学教育》《中学数学研究》《中学数学》《中学生数学》《中学生数理化》等期刊有文章录用发表及获奖。曾获中山市中国高考评价体系高中数学组一等奖第一名,中山市中小学微课一等奖,中山市综合实践活动征文二等奖,活动方案设计三等奖等。

版权声明

本刊所有文字和图片作品,未经许可,不得转载、摘编。凡投稿本刊,或允许本刊登载的作品,均视为已授权本刊在刊物、增刊、图书上使用,以及许可本刊授权合作网站(中国知网、万方数据库、维普资讯网等)以数字化方式复制、汇编、发行、信息网络传播本刊全文。本刊支付的稿酬,已包含授权费用。作者投稿给本刊即意味着同意上述约定,如有异议请与本刊签订书面协议。

本社广告中心根据《广告法》等国家有关法规审查及刊登广告,若广告主有超过广告内容的后续行为,均与本刊及广告中心无关。

封面刊名题字:华罗庚

顾问单位:中国数学会 中国物理学会 中国化学会

学术顾问:任子朝 韩家勋 李勇

委员:(按拼音排序)

陈进前 戴儒京 狄振山 高慧明 郭统福 何万龄 黄千生 蒋天林
李伟 李胜荣 李树祥 刘大鸣 孟卫东 施建昌 隋俊礼 王国平
王后雄 王星元 徐汉屏 余永安 袁竞成 张向东 张援 张北春