全概率公式在复杂事件概率计算中的应用

广东省河源高级中学 (517000)　李佳炎　张玉婷

全概率公式是概率论中最基本且最重要的公式之一, 它能帮助我们从简单已知事件的概率推出复杂事件的概率. "全概率公式"已经成为 2019 版普通高中教科书数学选择性必修第三册的重要内容, 可以预见, 未来在高考、强基竞赛等试题中将常看到全概率公式的身影, 因此如何应用全概率公式变得非常重要.

完备事件组[1]　设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个事件, 若满足:

(1) 完全性: $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$;

(2) 互不相容性: $A_iA_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, n$;

(3) $P(A_i) > 0, i = 1, 2, \cdots, n$,

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 Ω 的一个完备事件组.

全概率公式[1]　如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是样本空间 Ω 一个完备事件组, 则对任意事件 B, 有

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B|A_i).$$

利用全概率公式计算复杂事件的概率, 关键在于找到适当的完备事件组对样本空间进行分割, 这里的"适当"指在完备事件组下该事件的条件概率能够较为容易地求出. 下面本文总结三种常用的完备事件组的类型.

类型一: 以"前 $n-1$ 次试验结果"构成的事件列作为完备事件组

例 1　从有 a 个红球和 b 个蓝球的袋子中, 每次随机摸出一个球, 摸出的球不再放回, 显然, 第一次摸出红球的概率是 $\dfrac{a}{a+b}$, 那么第 $n(n \leqslant a+b)$ 次摸球摸到红球的概率是多大? 如何计算这个概率?

分析　由于是不放回的摸球, 每次摸球时, 袋中的总球数和红球数都会发生变化, 这给概率计算带来很大的麻烦. 事实上, 要计算第 n 次摸到红球的概率, 需要知道前 $n-1$ 次摸球的结果如何, 不妨考虑选择"前 $n-1$ 次摸球中摸到红球的个数"来分割样本空间, 设 $A_i=${前 $n-1$ 次摸球中恰好摸到 i 个红球}, $i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$, 容易验证这些事件可以构成一个完备事件组, 并且利用古典概型, 可以求出 $P(A_i) = \dfrac{C_a^i C_b^{n-1-i}}{C_{a+b}^{n-1}}$, 而对任意的 i, 在事件 A_i 发生的条件下, 第 n 次摸球时, 摸到红球的概率也是可求的, 等于 $\dfrac{a-i}{a+b-(n-1)}$, 于是可以利用全概率公式求出第 n 次摸球摸到红球的概率.

解答　设 $A_i=${前 $n-1$ 次摸球中恰好摸到 i 个红球}, $i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$, 则 $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$ 两两互斥, 且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$, 即 $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$ 可以构成完备事件组, 由古典概型知, $P(A_i) = \dfrac{C_a^i C_b^{n-1-i}}{C_{a+b}^{n-1}}$, 设 $B_n=${第 n 次摸到红球}, 则 $P(B_n|A_i) = \dfrac{a-i}{a+b-(n-1)}$, 根据全概率公式得:

$$\begin{aligned}
P(B_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} P(A_i) P(B_n|A_i) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{C_a^i C_b^{n-1-i}}{C_{a+b}^{n-1}} \cdot \frac{a-i}{a+b-(n-1)} \\
&= \frac{\sum\limits_{i=0}^{n-1} aC_a^i C_b^{n-1-i} - \sum\limits_{i=0}^{n-1} iC_a^i C_b^{n-1-i}}{C_{a+b}^{n-1}(a+b-n+1)} \\
&\quad (\text{利用} kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1},) \\
&= \frac{\sum\limits_{i=0}^{n-1} aC_a^i C_b^{n-1-i} - \sum\limits_{i=0}^{n-1} aC_{a-1}^{i-1} C_b^{n-1-i}}{C_{a+b}^{n-1}(a+b-n+1)} \\
&= \frac{a\sum\limits_{i=0}^{n-1} C_b^{n-1-i}\left(C_a^i - C_{a-1}^{i-1}\right)}{C_{a+b}^{n-1}(a+b-n+1)} = \frac{a\sum\limits_{i=0}^{n-1} C_b^{n-1-i} C_{a-1}^i}{C_{a+b}^{n-1}(a+b-n+1)} \\
&\quad (\text{利用} C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \cdots + C_n^k C_m^0 = C_{n+m}^k) \\
&= \frac{aC_{a+b-1}^{n-1}}{C_{a+b}^{n-1}(a+b-n+1)} \\
&= \frac{a\dfrac{(a+b-1)!}{(n-1)!(a+b-n)!}}{\dfrac{(a+b)!}{(n-1)!(a+b-n+1)!} \cdot (a+b-n+1)} = \frac{a}{a+b}.
\end{aligned}$$

评注　巧合的是, 不管是不放回摸球还是有放回摸球, 在第 n 次摸球时, 摸到红球的概率是相等的, 与摸球次数无关, 只与袋中的红球数与蓝球数有关. 而上述以"前 $n-1$ 次摸球结果"构成的完备事件组时, 解法相对复杂, 不妨换个角度思考.

既然第 n 次不放回摸球时, 摸到的是红球的概率只与袋中的红球数与蓝球数有关, 假设第一次摸球摸到的是红球, 则此时袋中还剩 $a-1$ 个红球和 b 个蓝球, 在这种条件下, 第 n 次摸到的是红球的概率, 可以看成是从装有 $a-1$ 个红球和 b 个蓝球的袋中, 从头开始不放回地摸球, 第 $n-1$ 次摸到的是红球的概率, 其值为 $\dfrac{a-1}{a+b-1}$, 同理若第一次摸球摸到

的是蓝球, 则在该条件下, 第 n 次摸球摸到的是红球的概率是 $\frac{a}{a+b-1}$, 由于例 1 的结论与试验次数 n 无关, 我们不妨对其先猜想, 然后利用数学归纳法反复归纳证明, 证明过程中可以反复使用该结论来求上述条件概率.

类型二: 以“第一次试验结果”构成的事件列作为完备事件组

例 2 题目同例 1.

解答 设 B_n ={第 n 次摸到红球}, 猜想: $P(B_n)=\frac{a}{a+b}$.

证明 (数学归纳法): 当 $n=1$ 时, 猜想显然成立; 假设当 $n=k$ 时, $P(B_k)=\frac{a}{a+b}$, 即第 k 次摸到红球的概率是袋中红球数与总球数的比, 则当 $n=k+1$ 时, 由全概率公式得 $P(B_{k+1})=P(B_1)P(B_{k+1}|B_1)+P(\bar{B}_1)P(B_{k+1}|\bar{B}_1)$, 在第一次摸球摸到的是红球的条件下, 第 n 次摸到的是红球的概率相当于从装有 $a-1$ 个红球和 b 个蓝球的袋中不放回地摸球, 第 k 次摸到红球的概率, 由归纳假设知 $P(B_{k+1}|B_1)=\frac{a-1}{a+b-1}$, 同理可得: $P(B_{k+1}|\bar{B}_1)=\frac{a}{a+b-1}$, 所以

$$\begin{aligned}P(B_{k+1})=&P(B_1)P(B_{k+1}|B_1)+P(\bar{B}_1)P(B_{k+1}|\bar{B}_1)\\=&\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a-1}{a+b-1}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b-1}=\frac{a}{a+b},\end{aligned}$$

于是, 结论成立.

例 3 (2018 年湖南省高中数学联赛预赛 B 卷) 棋盘上标有第 0, 1, 2, ⋯, 100 站, 棋子开始时位于第 0 站, 棋手抛掷均匀硬币走跳棋游戏. 若掷出正面, 棋子向前跳出一站; 若掷出反面, 棋子向前跳出两站, 直到跳到第 99 站 (胜利大本营) 或第 100 站 (失败大本营) 时, 游戏结束. 设棋子跳到第 n 站的概率为 p_n.

(1) 求 p_3 的值;

(2) 证明: $p_{n+1}-p_n=-\frac{1}{2}(p_n-p_{n-1})\,(2\leqslant n\leqslant 99)$;

(3) 求 p_{99}, p_{100} 的值.

分析 (2) 本题与例 2 类似, 如果第一次向前跳出一站, 在这种条件下, 棋子跳到 n 站的概率, 相等于把第一站作为起点, 棋子跳到第 $n-1$ 站的概率, 不妨设 B ={第 1 次向前跳出一站}, $\bar{B}$ ={第 1 次向前跳出两站}, 则可以选择 B 和 $\bar{B}$ 作为完备事件组, 设 A_n ={棋子跳到第 n 站}, 则 $P(A_n|B)=P(A_{n-1})$, $P(A_n|\bar{B})=P(A_{n-2})$, 从而可以利用全概率公式建立递推关系来解决问题.

解答 (2) 设 A_n ={棋子跳到第 n 站}, 则 $P(A_n)=p_n$, $n=1,2,\cdots,100$, B ={第 1 次向前跳出一站}, 则 $P(B)=\frac{1}{2}$, 由全概率公式得 $P(A_{n+1})=P(B)P(A_{n+1}|B)+P(\bar{B})P(A_{n+1}|\bar{B})$. 注意到, 在第一次向前跳出一站的条件下, 跳到第 $n+1$ 站的概率等于从头开始跳到第 n 站的概率, 即 $P(A_{n+1}|B)=P(A_n)=p_n$, 同理得 $P(A_{n+1}|\bar{B})=P(A_{n-1})=p_{n-1}$, 因此 $p_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{2}p_{n-1}$, 整理得 $p_{n+1}-p_n=-\frac{1}{2}(p_n-p_{n-1})\,(2\leqslant n\leqslant 99)$, 又 $p_1=\frac{1}{2}, p_2=\frac{3}{4}$, 所以 $\{p_{n+1}-p_n\}$ 是首项为 $\frac{1}{4}$, 公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列, 解得 $p_n=\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^n+\frac{2}{3}$.

评注 根据例 2 和例 3 的分析, 我们可以看到, 当随机试验需要进行 n 次时, 若已知第一次试验结果的条件下, 进行剩下 $n-1$ 次的试验, 某个与试验相关的事件的概率, 等于从头开始试验, 试验次数为 $n-1$ 次时该事件的概率, 这时可以选择以“第一次试验的结果”构成的事件列作为完备事件组, 利用全概率公式去计算该复杂事件的概率.

类型三: 以“前一次试验结果”构成的事件列作为完备事件组

例 4 设有 n 个袋子, 每袋装有 a 个红球, b 个蓝球, 从第一袋摸出一球放入第二袋, 再从第二袋中摸出一球放入第三袋, 以此类推, 直至从第 n 袋中取出一球, 求最后摸出的是红球的概率.

分析 在已知第一袋中摸到的是红球放入第二袋的条件下, 这时第二袋有 $a+1$ 个红球和 b 个蓝球, 要求最后摸出的是红球的概率并不等于从头开始摸球放入下一袋, 直至第 $n-1$ 袋取出的是红球的概率, 因为后者要求每一袋中的红球数及蓝球数都是一样的, 而前者并不符合, 故不适合选择“第一次试验结果”构成的事件列作为完备事件组.

但是如果已知前一次试验的结果, 比如在从 $n-1$ 袋取出的是红球放入第 n 袋的条件下, 此时第 n 袋有 $a+1$ 个红球和 b 个蓝球, 因此从第 n 袋取出的是红球的概率是 $\frac{a+1}{a+b+1}$, 同理, 在从 $n-1$ 袋取出的是蓝球放入第 n 袋的条件下, 从第 n 袋取出的是红球的概率是 $\frac{a}{a+b+1}$, 不妨设 A_i ={第 i 袋摸出的是红球}$(i=1,2,\cdots,n)$, $P(A_n)=p_n$, 则 $P(A_{n-1})=p_{n-1}$, $P(\bar{A}_{n-1})=1-p_{n-1}$, 因此可以选择“前一次试验结果”所构成的事件列作为完备事件组, 利用全概率公式建立数列 p_n 的递推关系, 进而求解. 事实上, 容易计算得出 $p_1=p_2=\frac{a}{a+b}$, 因此可以猜想 $p_n=\frac{a}{a+b}$, 然后仿照例 2 运用数学归纳法证明.

解答 设 A_i ={第 i 袋摸出的是红球}, $i=1,2,\cdots,n$, 显然, $P(A_1)=\frac{a}{a+b}$, 由全概率公式得,

$$\begin{aligned}P(A_2)=&P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1)\\=&\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a+1}{a+b+1}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b+1}=\frac{a}{a+b}\end{aligned}$$

于是我们可以猜想: $P(A_n)=\frac{a}{a+b}$, 下面用数学归纳

法证明: 当 $n=1$ 时, 命题显然成立, 假设当 $n=k$ 时, $P(A_k)=\dfrac{a}{a+b}$, 则当 $n=k+1$ 时, 由全概率公式得 $P(A_{k+1})=P(A_k)P(A_{k+1}|A_k)+P(\bar{A}_k)P(A_{k+1}|\bar{A}_k)$, 因为从第 k 袋摸到的是红球的条件下, 第 $k+1$ 袋中装有 $a+1$ 个红球和 b 个蓝球, 所以从第 $k+1$ 袋取出的是红球的概率是 $\dfrac{a+1}{a+b+1}$, 即 $P(A_{k+1}|A_k)=\dfrac{a+1}{a+b+1}$, 同理可得: $P(A_{k+1}|\bar{A}_k)=\dfrac{a}{a+b+1}$, 故

$$\begin{aligned}P(A_{k+1})=&P(A_k)P(A_{k+1}|A_k)+P(\bar{A}_k)P(A_{k+1}|\bar{A}_k)\\=&\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a+1}{a+b+1}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b+1}=\frac{a}{a+b}.\end{aligned}$$

于是, 猜想得证.

例 5 (2022 湖北省八市高三 (3 月) 联考) 2022 年 5 月 6 日, 中国女足在两球落后的情况下, 以 3 比 2 逆转击败韩国女足, 成功夺得亚洲杯冠军, 在之前的半决赛中, 中国女足通过点球大战 6 : 5 惊险战胜日本女足, 其中门将朱钰两度扑出日本队员的点球, 表现神勇.

(1) 扑点球的难度一般比较大, 假设罚点球的球员会等可能地随机选择球门的左、中、右、三个方向射门, 门将也会等可能地随机选择球门的左、中、右三个方向扑点球, 而且门将即使方向判断正确也有 $\dfrac{1}{2}$ 的可能性扑不到球, 不考虑其他因素, 在一次点球大战中, 求门将在前三次扑出点球的个数 X 的分布列和数学期望;

(2) 好成绩的取得离不开平时的努力训练, 甲、乙、丙、丁 4 名女足队员在某次传接球的训练中, 球从甲脚下开始, 等可能地随机传向另外 3 人中的 1 人, 接球者接到球后再等可能地随机传向另外 3 人中的 1 人, 如此不停地传下去, 假设传出的球都能接住, 记第 n 次传球之前球在甲脚下的概率为 p_n, 易知 $p_1=1, p_2=0$,

① 试证明 $\{p_n-\dfrac{1}{4}\}$ 是等比数列;

② 设第 n 次传球之前球在乙脚下的概率为 q_n, 比较 p_{10} 和 q_{10} 的大小.

分析 (2) 传球具有这样一个特点——若上一次传球前, 球在甲脚下, 则下一次传球前球必然不在甲脚下, 而如果上一次传球前, 球不在甲脚下, 则下一次传球前, 球在甲或者其他两个人脚下的概率是相等的, 均为 $\dfrac{1}{3}$, 因此选择“前一次试验结果”构成的事件列作为完备事件组是很自然的想法.

解答 (2) ① 设 $A_n=$\{第 n 次传球前球在甲脚下\}, 则 $P(A_n)=p_n$, 容易知道, $P(A_{n+1}|A_n)=0$, $P(A_{n+1}|\bar{A}_n)=\dfrac{1}{3}$, 由全概率公式得: $P(A_{n+1})=P(A_n)P(A_{n+1}|A_n)+P(\bar{A}_n)P(A_{n+1}|\bar{A}_n)=P(A_n)\times 0+(1-P(A_n))\times\dfrac{1}{3}$, 即 $p_{n+1}=\dfrac{1}{3}(1-p_n)$, 则 $p_{n+1}-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{3}(p_n-\dfrac{1}{4})$, 所以数列 $\{p_n-\dfrac{1}{4}\}$ 是首项为 $\dfrac{3}{4}$, 公比为 $-\dfrac{1}{3}$ 的等比数列.

② 由①可得 $p_n=\dfrac{3}{4}(-\dfrac{1}{3})^{n-1}+\dfrac{1}{4}$, 设 $B_n=$\{第 n 次传球前球在乙脚下\}, 则 $P(B_n)=q_n$, 显然 $q_1=0$, $q_2=\dfrac{1}{3}$, 由全概率公式得 $P(B_{n+1})=P(B_n)P(B_{n+1}|B_n)+P(\bar{B}_n)P(B_{n+1}|\bar{B}_n)=P(B_n)\times 0+(1-P(B_n))\times\dfrac{1}{3}$, 即 $q_{n+1}=\dfrac{1}{3}(1-q_n)$, 则 $q_{n+1}-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{3}(q_n-\dfrac{1}{4})$, 解得 $q_n=-\dfrac{1}{4}(-\dfrac{1}{3})^{n-1}+\dfrac{1}{4}$. 易得

$$p_{10}=\frac{3}{4}\times(-\frac{1}{3})^9+\frac{1}{4}<\frac{1}{4}<-\frac{1}{4}\times(-\frac{1}{3})^9+\frac{1}{4}=q_{10}.$$

容易发现, 当 $n\to+\infty$ 时, $p_n\to\dfrac{1}{4}$, $q_n\to\dfrac{1}{4}$, 这表明当传球次数足够多, 不管由谁开始传球, 每个人接球的概率是几乎是相等的.

例 6 (2020 年高考江苏卷) 甲口袋装有 2 个黑球和 1 个白球, 乙口袋装有 3 个白球, 现从甲、乙口袋中各任取一个球交换放入另一个口袋, 重复 n 次这样的操作, 记甲口袋中黑球的个数为 X_n, 恰有 2 个黑球的概率为 p_n, 恰有 1 个黑球的概率为 q_n,

(1) 求 p_1, q_1 和 p_2, q_2;

(2) 求 $2p_n+q_n$ 与 $2p_{n-1}+q_{n-1}$ 的递推关系和 X_n 的数学期望 $E(X_n)$(用 n 表示).

分析 (2) 每次交换球前都先要确定此时甲、乙两袋的黑球数与白球数, 因为不同的黑球数和白球数, 会直接影响下一次交换球时, 甲袋中黑球数为 0, 1, 2 的概率, 比如说在已知交换前甲袋中有 2 个黑球和 1 个白球, 乙袋有 3 个白球, 则交换后甲袋黑球数为 0 的概率是 0, 而甲袋中黑球为 1 的概率是 $\dfrac{2}{3}$, 这是因为这次交换是将甲袋中的黑球与乙袋中白球作交换, 而在甲袋中摸到黑球的概率是 $\dfrac{2}{3}$, 在乙袋中摸到白球的概率是 1, 同理可以得到交换后甲袋中黑球数为 2 的概率是 $\dfrac{1}{3}$, 根据同样的分析, 我们可以得到在交换前甲袋中的黑球数分别是 0, 1, 2 的条件下, 交换后甲袋中黑球数分别是 0, 1, 2 的所有概率, 于是, 考虑选择“前一次试验结果”构成的事件列作为完备事件组, 即选择“交换前甲袋中黑球的个数”构成的事件列 $\{X_n=0\}, \{X_n=1\}, \{X_n=2\}$ 来作为完备事件组, 利用全概率公式建立起 p_n 和 q_n 的地推关系, 从而解决问题.

解答 (2) 由题设可知: X_n 的可能取值为 0, 1, 2, $P(X_n=2)=p_n$, $P(X_n=1)=q_n$, 故 $P(X_n=0)=1-p_n-q_n$, 显然, 对任意 $n\in\mathbb{N}^*$, 事件 $\{X_n=0\}, \{X_n=1\}, \{X_n=2\}$ 均构成完备事件组, 因而由全概率公式可得:

$$P(X_n=2)=P(X_{n-1}=2)P(X_n=2|X_{n-1}=2)$$

$$+P(X_{n-1}=1)P(X_n=2|X_{n-1}=1)$$
$$+P(X_{n-1}=0)P(X_n=2|X_{n-1}=0).$$

$P(X_n=2|X_{n-1}=2)$ 表示在第 n 次交换前, 甲口袋已经有两个黑球, 而第 n 次交换后, 仍然有两个黑球, 即只把甲口袋中的白球与乙口袋的白球交换, 因此

$$P(X_n=2|X_{n-1}=2)=\frac{1}{3};$$

$P(X_n=2|X_{n-1}=1)$ 表示在第 n 次交换前, 甲口袋恰有 1 个黑球, 第 n 次交换后, 甲口袋有两个黑球, 即甲口袋的白球与乙口袋的黑球交换, 因此

$$P(X_n=2|X_{n-1}=1)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9};$$

$P(X_n=2|X_{n-1}=0)$ 表示第 n 次交换前, 甲口袋没有黑球, 而第 n 次交换后, 甲口袋有两个黑球, 这是不可能事件, 因此 $P(X_n=2|X_{n-1}=0)=0$,
故 $P(X_n=2)=\frac{1}{3}P(X_{n-1}=2)+\frac{2}{9}P(X_{n-1}=1)$, 即

$$p_n=\frac{1}{3}p_{n-1}+\frac{2}{9}q_{n-1} \quad ①$$

同理可得:

$$P(X_n=1)=P(X_{n-1}=2)P(X_n=1|X_{n-1}=2)$$
$$+P(X_{n-1}=1)P(X_n=1|X_{n-1}=1)$$
$$+P(X_{n-1}=0)P(X_n=1|X_{n-1}=0).$$

$P(X_n=1|X_{n-1}=2)$ 表示第 n 次交换前甲口袋有两个黑球, 第 n 次交换后仅剩 1 个黑球, 即把甲口袋的黑球与乙口袋的白球交换, 因此

$$P(X_n=1|X_{n-1}=2)=\frac{2}{3};$$

$P(X_n=1|X_{n-1}=1)$ 表示第 n 次交换前甲口袋恰有 1 个黑球, 而第 n 次交换后仍然恰有 1 个黑球, 即把甲口袋中的白球与乙口袋的白球交换或者把甲口袋的黑求与乙口袋的黑求交换, 因此 $P(X_n=1|X_{n-1}=1)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{9}$;

$P(X_n=1|X_{n-1}=0)$ 表示第 n 次交换前甲口袋没有黑球, 第 n 次交换后恰有 1 个黑球, 即把甲口袋的白球与乙口袋的黑球交换, 因此 $P(X_n=1|X_{n-1}=0)=\frac{2}{3}$, 故

$$P(X_n=1)$$
$$=\frac{2}{3}P(X_{n-1}=2)+\frac{5}{9}P(X_{n-1}=1)+\frac{2}{3}P(X_{n-1}=0),$$

即

$$q_n=\frac{2}{3}p_{n-1}+\frac{5}{9}q_{n-1}+\frac{2}{3}(1-p_{n-1}-q_{n-1})=\frac{2}{3}-\frac{1}{9}q_{n-1} \quad ②$$

由①②可得:

$$2p_n+q_n=2(\frac{1}{3}p_{n-1}+\frac{2}{9}q_{n-1})+(\frac{2}{3}-\frac{1}{9}q_{n-1})$$
$$=\frac{1}{3}(2p_{n-1}+q_{n-1})+\frac{2}{3},$$

即 $2p_n+q_n-1=\frac{1}{3}(2p_{n-1}+q_{n-1}-1)$, 容易可得 $p_1=\frac{1}{3}, q_1=\frac{2}{3}$, 因此数列 $\{2p_n+q_n-1\}$ 是首项为 $\frac{1}{3}$, 公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列, 因此 $2p_n+q_n-1=(\frac{1}{3})^n$, 故

$$E(X_n)$$
$$=0\times P(X_n=0)+1\times P(X_n=1)+2\times P(X_n=2)$$
$$=q_n+2p_n=(\frac{1}{3})^n+1.$$

评注 通过对上面三道例题的分析, 可以看到, 在已知上一次试验结果的条件下, 可以直接确定下一次试验各种可能情况发生的概率时, 可以选择“前一次试验结果”所构成的事件列作为完备事件组.

不妨对比例 1 和例 4, 对于例 1, 若已知前一次摸球摸出的是红球, 我们只能知道袋中红球数和总球数减一, 至于红球还剩多少并不能因此确定, 还需要知道前面每一次摸球的结果, 因此不宜选择“前一次摸球的结果”所构成的事件列作为完备事件组; 反观例 4, 由于每次摸球只会影响球被摸出和球被放入的两袋球的红球数或蓝球数, 因此若已知在前一袋中摸球的结果, 便可得到下一袋摸球中摸出的是红球的概率, 所以可以选择“在前一袋中摸球结果”所构成的事件列来作为完备事件组.

同时我们还可以看到, 每一次试验中的某个事件发生概率可以看成一个数列, 若是能得到这个事件在已知上一次试验结果的条件下发生的概率, 我们便可以利用全概率公式得到这个数列的递推关系, 进而求解出这个数列的通项公式.

总之, 复杂事件的概率计算一直是概率统计中的一个重难点问题, 其技巧性强, 方法比较灵活, 往往还都与试验次数 n 有关, 很难一一枚举, 学生难以掌握. 通过本文的实例分析, 不难发现, 找准完备事件组, 把事件的概率看作一个数列, 利用全概率公式建立起递推关系, 结合数列递推关系的求解方法和数学归纳法, 能有效解决许多复杂事件的概率计算问题.

参考文献

[1] 纪宏伟. 全概率公式中确定完备事件组的方法 [J]. 高等数学研究, 2020,1(1): 92-96.
[2] 孙荣桓. 趣味随机问题 [M]. 北京: 科学出版社, 2015.
[3] 茆诗松, 程依明, 濮晓龙. 概率论与数理统计教程 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2011.