

高三数学复习:请让学生来“说题”

——以“数形结合求解平面向量中模的最值问题”为例

浙江省淳安中学(311700) 方志勇



一、研究缘起

高三数学的一轮复习,每个老师都精心准备每一堂复习课,认真讲透每一道题、每一个知识点.学生也在认真的听、努力地学、拼命地做,可是课后学生做作业时就思绪很乱,正确率不高,一些课堂上反复强调的知识点依旧出错,以及最后的成绩让我们教师大跌眼镜.经了解,学生在高三一轮复习课堂上都完全听的懂,但课后自己做题时,就头绪很乱,没有多大提高.对于这样的结果,我进行了深刻的反思,这种精心设计的课堂是我们平时复习课经常采用的形式,可是为什么教师花了那么多时间和精力,学生却收效不明显呢?

(一)提示超前,遏制思考

在问题出示后,教师未等学生进行思考或学生的思考刚刚“起步”,便急于提示——或抽出问题中的关键词句,教师的这种习惯性提示虽然节约了时间,但殊不知,这种形式无异于教师思考取代学生的思考,扼杀了学生的独立思考.

(二)关注结果,忽视过程

教师在整個复习过程中,往往关注在把这个框架完整展示给学生,而忽视了框架构建过程.其实引导学生如何构建知识框架才是真正的“授之以渔”.因为构建的过程中有方法,过程中有能力,只有突出过程,才能潜移默化的培养学生的能力.

(三)教师主导,缺少思维

这种所谓“精心设计”的教学模式中,教师其实仍是课堂的主导者,学生只是按照教师的预设按部就班接收,并没有真实参与思考过程,老师的理解、分析、思考代替了学生;本应由学生自主思考、训练、内化的环节却被老师在课堂上一人包办,使学生的学习过程始终处于被动状态,没有获取知识的积极性、主动性,使学生陷入“一听就会,一做就错,一考就糟”的局面.

二、学生说题的意义

学生“说题”:让学生说出题目的条件、结论和涉及的知识;是让学生说出自己对数学题目的认识与理

解,说出与学过的哪一类问题相似;说出可能用到的数学思想,说出自己的想法和猜测;说出解题方法是如何想到,说出为什么这样想的等.

(一)学生说题活动可以全面展示学生的思考过程

教师常常通过批阅学生作业了解学生对知识的掌握情况,但学生作业只能呈现解题过程和结果.而学生说题可以全方位展示学生的思考过程,呈现学生的认知程度,帮助老师发现学生学习过程中的错误和漏洞,及时加以修补,同时对其他学生也能起到促进作用.所以学生说题可以帮助学生从孤立的思考环境中走出来,将完整的思考过程显现出来,真正促进教师更好地教和学生更好地学.

(二)学生说题活动可以激发学生的学习兴趣

学生说题是一个生动活泼的、主动的、富有个性的过程,说题者要面向老师和全体同学说出自己对题目的理解和解决办法,这给说题者提供了一个展示自我的平台.老师和同学关注的目光、赞许的眼神可以提高说题者的自信心,从心理学角度来看中学阶段是人生观、世界观、价值观形成的关键时期,学生迫切希望得到别人的认同及实现自我价值.所以说学生说题活动可以让其体验到数学学习的成就感,从而进一步激发学习兴趣,勇于挑战一个又一个困难.

(三)学生说题活动可以促进小组合作的有效性

小组合作是重要的课堂学习活动,希望通过合作交流获得知识,但有时小组合作往往流于形式,并没有得到有效开展.很多时候小组合作只是在交流解题过程和答案,不会的学生仍然没能真正听懂问题.有时遇到组内没有人能解决的问题时,也不能开展积极讨论,以致最后要么保持沉默,要么聊一些与课堂无关的内容,学生说题活动使学生不仅学会“写数学”、“做数学”,更要善于“说数学”,能够学会分析思考争辩,提高分析问题和解决问题的各种能力.

三、课堂实践

(一)课前“说题”准备——说什么怎么说

“备题目”就是要根据学生的“最近发展区”,教师

充分的备课,精心选择典型、合适的问题,考虑题目考察的是哪些内容,通过该题能让学生掌握哪些知识点,应用到哪些规律,选题是否有代表性,与这些题目有关联的问题还有哪些,有没有值得推广的好方法。“备学生”在学生认真做题、教师精心批改的基础上,分析每个同学已有的能力和基础之上,通过作业的批改,发现学生对所学知识点的掌握情况,分析题目做错的具体原因,哪几个学生犯了同样的错误,需要让谁起来回答效果最好,也就是要明确“说题”的主角。“备说法”是指在课堂上如何引导学生“说题”。那就需要把“备题目”和“备学生”很好地结合起来,分析让谁说,说什么,在说的同时是否需要上黑板给大家板书演示,应该设计什么样的问题,怎样去问,设问还是反问,这些都需要精心设计,达到通过借学生说题去圆满掌握本节课的任务,教师只是这节课的编剧和导演。

学生“说题”可以从题意、思路、所需要调动的学科知识和书写的规范性等进行描述。

1、说题意说审题

学生对问题的解答过程就是与命题者之间的思想交流,只不过平常的交流是面对面的交流,而试卷的解答是以试卷为载体的思想交流。因此,学生要在解答中做到切中要点,思路完整,避免答非所问、离题万里,就必须揣摩命题者的想法,准确把握命题者的意图。学生通过“说题意”可以体会到要得心应手地解答习题,必须要根据题目去揣摩命题者的意图。

很多学生拿到题目后,便会迫不及待地动手,对于简单的题,确实会很快得到答案,但是对于稍复杂的问题,当他们进行题型套代失败后,便会束手无策。因此,认真审题、学会分析非常重要。审题过程就是破解题意的过程,它是解题的关键一步。审题的目的不仅仅是一字不漏的读题,而且还要通过阅读、思考、分析来完成,从而制定解题规划。学生通过由教师引导而自主说出整个审题过程,能有效地避免学生在回答的过程中出现思维的偏差。从表面上看,这个阶段似乎在浪费时间,我们老师作为“过来人”当然知道用哪种方法来解这道题最简洁、最快速,但是,对于学生而言,我们不能剥夺学生“走弯路”、探索的权利,我们的目的不是单纯地让学生学会解这道题,而是不断培养学生思考问题、分析问题的能力。

2、说知识说过程

第 6 页

如果说审题的过程是答题的前奏的话,那么,知识的调动与迁移、选择就是答题的内容与灵魂。学生要根据对材料的把握、问题指向的准确定位、所学的学科知识、人文知识及相关的对现实生活的认识等相关知识,说出从中选择的知识结构与内容,甚至要说出具体运用的知识点。在学生进行审题、分析题目,得到自己的解题规划后,就要将自己的想法付诸行动。学生按照自己的规划,把解决这个问题过程书写出来,并且要求学生对解题过程的思考进行深入的分析。尤其是小组内部交流,全班交流,让学生展示真实的思考与探索过程,相互学习解决问题的办法,提高学生解决问题的能力。

3、说演绎说反思

荷兰著名数学家汉斯·弗赖登塔尔精辟指出,反思是数学思维活动的核心和动力,通过反思才能使学生的现实世界数学化,没有反思,学生的理解就不可能从一个水平升华到更高的水平。因此,在解题后需要对解题过程进行回顾和反思,总结方法,认识规律,达到举一反三、触类旁通的目的,也进一步提高学生研究问题的能力。课堂说题演绎总体根据学生主体性原则和教师主导性原则。通过对批改作业中发现的问题先做简要说明后直奔主题,对于设计好的课堂进行现场直播,及时注意“说题”学生的表现,同时也要兼顾其余学生的反应。要求老师把握好课堂时间和进度。一节“说题”课中师生共同完成“说题”的时间在三十分钟左右,这期间三分之一的时间是教师引导着学生去思索,让学生自己再去集中整理改错,内化成自己的东西。课堂紧密围绕主题进行教学,对于跑题和离题及说不上来的学生,教师要从中“穿针引线”加以引导和点拨,使得整个课堂在自己掌握的范围之内。

说题课后,师生要共同反思。因为在这堂现场直播课程中,师生之间、生生之间有好多的思维灵感碰撞出来的火花,既要总结成功的地方也要找出不足,继续改进。学生要善于总结解题过程各个环节的心得体会,审题,如何做到一题多解和多题一解等等。教师要总结本堂课教学成功的地方与反思不足之处,重新审视学生学习中存在各种问题,为以后的教学提出相应改进的措施,这样的教学能很好地促进教与学、师与生共同发展。

(二)课内“说题”准备——什么方式说

在高三复习课上,可以通过引导学生从题意、审

题、知识等方面进行说题,经过一段学生“说题”教学之后,发现学生在态度上发生了明显的改变,从一开始没有人主动要求说题,到后来几个人抢着要说题.说明学生不仅会说题了,而且从说题的过程中找到了自信和乐趣.所以笔者也尝试了多种说题方式,总结如下三种:

1、学生独立说题

学生在解决问题时,很多学生具有辐合思维倾向,辐合思维是指人的思维朝向知识一种解决问题的方法.与之相反方向的发散思维朝向更多的方向.在教学中,可给定一个问题后,让学生独立说题,尽可能让其多发言多思考,从不同角度来说题,不仅有助于培养学生的发散思维,也能给予学生更多的信息和兴趣.课堂教学不是单一传递正确答案的过程,而是通过学生的自主思考,大胆表达自己的想法,结果质疑、对比、纠正错误,完善方法.这样的课堂才更有效.

2、师生互动说题

针对某些复杂或学生错误较多的题目,若让学生独立说题难度较大,这时就需要教师课前将说题内容重新分解重组,一步一步引导学生,这样的说题过程能使师生在解题方法与思维方式上进行沟通,从而使有所突破和创新,同时也提高了学生的思维能力和语言表达能力,深化其对知识的理解和认识,提高其解题能力.通过对问题的变通设计,不同的学生找到了“说题”的着力点,引发同学们的广泛争论,充分暴露学生在知识掌握与审题能力方面的不足,针对这些问题,学生在集体讨论、争辩的过程中慢慢纠正了自己认识上的偏差,提高了原有的认知能力.课堂气氛显得活而有序,学生在说题的过程中提高了分析问题的系统性和知识的完整性.

3、学生书面说题

在学生“说题”教学一段时间之后,发现很多学生在听其他同学“说题”的时候容易走神,特别是面对复杂点的题目.于是,想到让学生选择比较难的题目进行书面整理,把当时思考错误的思路呈现在一旁,然后自己进行对比,找出思路中的关键点.

(三)组织课内“说题”——小专家大舞台

2016年上半年,笔者有幸听了本校一位资深教师上的一节高三复习课,以“数形结合求解平面向量模的最值问题”为课题,教师给出一个精选例题之后,

让学生思考,然后由学生来“说题”,说题意、说思路、说解法、说变式、说本质,整节课都来源于学生.听课老师普遍认为,对于高三学生而言,知识的储备问题不大,就是缺乏分析问题、解决问题的能力.即如何打开突破口,采用什么知识、从什么角度思考问题的能力.而这样的学生“说题”,把“说题”任务交给学生来完成,用这种反其道而行之的办法来替代传统数学教学中的老师讲题,替代老师对题目内的已知条件进行分析,把解题思路告诉学生,这种教学方法既能激发学生学习的兴趣,又让学生真正参与到课堂中来,让高三复习的有效性大大提升,思想方法落实到位,真正培养了学生的分析问题和解决问题的能力,提升了学生的数学思维能力,提升了学生对知识内化的能力,有着传统复习课不能效仿的积极作用.

案例:平面向量 a, b 满足 $|a|=|b|=2, a \cdot b=0$, 若 c 满足 $|c-a-b|=1$, 求 $|c|$ 的最大值.

1、提出问题——说题意说审题

学生1:本题已知两个模长确定的相互垂直的向量,和 c 满足的一个条件,求向量 c 模的最大值,由 $|a|=|b|=2, a \cdot b=0$ 可得 a, b 是相互垂直的、模相等的两个向量.所以我想建立直角坐标系, $a=(2,0), b=(0,2)$, 设 $c=(x,y)$, 则

$$a+b=(2,2), c-a-b=(x-2,y-2),$$

所以 $|c-a-b|=(x-2)^2+(y-2)^2=1$, 所以 c 的终点在以 $(2,2)$ 为圆心, 半径为 1 的圆上, 所以 $|c|_{\max}=|a+b|+1=2\sqrt{2}+1$.

教师:看到 $a \cdot b=0$, 说明 $a \perp b$, 是正交基底, 建立直角坐标系用坐标运算来解决问题是很好的方法, 很好.

学生2:由题目中的 $|c-a-b|=1$, 向量的模的大小, 我想到平方处理. 对原式进行平方处理, 得到

$$|c|^2 + |a|^2 + |b|^2 - 2a \cdot c - 2b \cdot c = 1,$$

化简得 $4\sqrt{2} \cos \langle c, a+b \rangle = |c| + \frac{7}{|c|}$, 又因为 $\cos \langle c, a+b \rangle \in [-1, 1], |c| > 0$, 所以 $0 < |c| + \frac{7}{|c|} \leq 4\sqrt{2}$, 解得 $|c|_{\max} = 2\sqrt{2} + 1$

教师：向量和数量之间可以通过平方来联系，由此想到对已知条件进行平方处理，很棒！

学生3：题目中的向量都可以用图1表示出来，我想到数形结合， $\vec{OA} = \mathbf{a}$ ， $\vec{OB} = \mathbf{b}$ ， $\vec{OC} = \mathbf{c}$ ，则 $\vec{OD} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ ，由题意得 $|\mathbf{c} - (\mathbf{a} + \mathbf{b})| = |\vec{OD} - \vec{OC}| = |\vec{CD}| = 1$ ，所以 \mathbf{c} 的终点在以 D 点为圆心，半径为1的圆上，所以 $|c|_{\max} = |\vec{OD}| + 1 = 2\sqrt{2} + 1$ 。

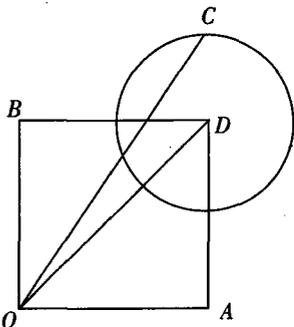


图1

教师：很好，想到利用数形结合来处理向量模的最值问题，很方便，计算也很简单。那谁能归纳一些平面向量中模的最值问题的求解方法吗？

学生4：坐标法，基向量法，几何法(数形结合)。

在整个知识回顾环节，教师创设问题，由学生说题意，说解法，说思想方法。教师只是教学的组织者和参与者，突现学生学习的主体地位。

2、分析问题——说变式说方法

教师：现在开动你的大脑，尝试改变题目中的某个条件，变出个新题目来求解 c 模的最大值，让大家来做。

学生说变式：

学生5：把题目中的条件 $|\mathbf{c} - \mathbf{a} - \mathbf{b}| = 1$ 换成 $(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0$ ，其他条件不变，求 $|c|$ 的最大值。

教师：哪位同学来说说这道题怎么解呢？

学生6：根据题意画出图形

(如图2)， $\vec{OA} = \mathbf{a}$ ， $\vec{OB} = \mathbf{b}$ ， $\vec{OC} = \mathbf{c}$ ，则 $\mathbf{a} - \mathbf{c} = \vec{CA}$ ， $\mathbf{b} - \mathbf{c} = \vec{CB}$ ，由 $(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0$ 得 $\vec{CA} \perp \vec{CB}$ ，所以点 C 在以 AB 为直径的圆上，设 AB 的中点为 D ，则当

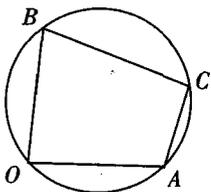


图2

O, D, C 三点共线时， $|c|$ 取到最大值，即

$$|c|_{\max} = |\vec{OD}| + R = \frac{1}{2}|\vec{AB}| + \frac{1}{2}|\vec{AB}| = |\vec{AB}| = 2\sqrt{2}$$

教师：很棒！抓住 $(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0$ 得 $\vec{CA} \perp \vec{CB}$ ，画出图形，数形结合求向量的模的最值一目了然。谁还能再变出新的题目吗？

学生7：把条件 $|\mathbf{c} - \mathbf{a} - \mathbf{b}| = 1$ 换成 $(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - 2\mathbf{c}) = 0$ ，

其他条件不变，求 $|c|$ 的最大值。

教师：很棒！对学生5的条件做了一点改变，情况又会是怎样的呢？哪位同学来说说你的想法。

学生8：根据学生6的想法，我想也可以用图形(如图3)把向量之间的关系表示出来，用数形结合的思想。 $\vec{OA} = \mathbf{a}$ ， $\vec{OB} = \mathbf{b}$ ， $\vec{OC} = \mathbf{c}$ ，延长 OC 到 F 使得 $OC = CF$ ，则 $\vec{OF} = 2\mathbf{c}$ ， $\mathbf{a} - \mathbf{c} = \vec{CA}$ ， $\mathbf{b} - 2\mathbf{c} = \vec{OB} - \vec{OF} = \vec{FB}$ ，由 C 为 OF 的中点，想到找 OB 的中点 E ，并连接 CE 。则 $CE \parallel BF$ ，又由 $(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - 2\mathbf{c}) = 0$ 得到 $\vec{CA} \perp \vec{BF}$ ，所以 $\vec{CA} \perp \vec{CE}$ ，所以点 C 在以 AE 为直径的圆上，设 AE 的中点为 G ，则 G 就是圆心，当 O, G, C 三点共线的时候，即 OC 为圆的直径时， $|c|$ 取到最大值，即

$$|c|_{\max} = 2R = AE = \sqrt{5}$$

教师：很好，看到中点想到中位线，继续用数形结合解决模的最值问题。还有没有同学可以把条件“72变”的？

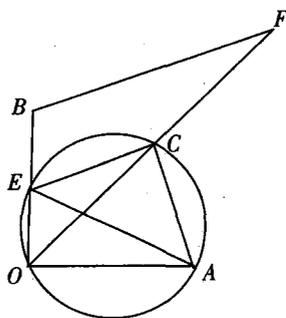


图3

学生9：把题目中的条件 $|\mathbf{c} - \mathbf{a} - \mathbf{b}| = 1$ 换成 $\langle \mathbf{a} - \mathbf{c}, \mathbf{b} - \mathbf{c} \rangle = 60^\circ$ ，其他条件不变，求 $|c|$ 的最大值。

教师：很厉害，前面都是垂直关系，现在一变不垂直了，变出向量夹角为 60° 的情况，哪位同学可以说说你对这道题的思考？

学生10：我想夹角为 60° 与前面垂直的本质是一样的，仍然可以数形结合，用图形(如图4)来求解。 $\vec{OA} = \mathbf{a}$ ， $\vec{OB} = \mathbf{b}$ ， $\vec{OC} = \mathbf{c}$ ，由 $\langle \mathbf{a} - \mathbf{c}, \mathbf{b} - \mathbf{c} \rangle = 60^\circ$ 可得

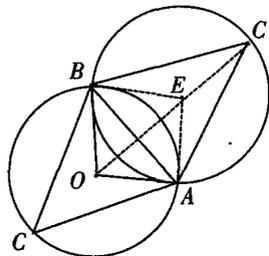


图4

$\angle ACB = 60^\circ$ ，所以点 C 在过 A, B 两点的圆上，且劣弧 \widehat{AB} 所对的圆周角 $\angle ACB = 60^\circ$ ，设此圆的圆心为点 E ，则当 O, E, C 三点共线时， $|c|$ 取到最大值，由劣弧 \widehat{AB} 所对的圆周角 $\angle ACB = 60^\circ$ ，可得其圆心角 $\angle AEB = 120^\circ$ ，由三角形知识可得 $|OE| = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{6}}{3}$ ， $|CE| = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ ，所以

$$|c|_{\max} = |OE| + |EC| = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

教师：很好，不是垂直也可以把 c 的终点转换到圆

高三数学复习：狠抓反馈，补偿教学

——从一道联考试题想到的

湖北省 华中师范大学第一附属中学(430223) 周龙虎
武汉市英格中学(430074) 刘师好

确定高三数学复习课标高和要求的核心依据就是切实客观的学情分析，相同的内容，在不同层次、不同学校、不同班级上法都不尽相同，甚至在同一班级不同时期也不相同。从教到学的方式，以学生为主体的教学模式正逐步成为主流。相对于教学内容，学生的已有经验、学习基础、思维特点更能决定课堂推进的方式乃至复习的成败。因而，关注高三复习中最重要的因素——学生才是提高复习效率的制胜法宝。课堂中，观察学生的表情和情绪；课后，倾听学生的、家长的反应，及时、细心批阅学生的作业，科学、有针对性的分析考试状况。只有不放松每一个有效反馈的细节，下一步的补偿教学才能真正做到恰到好处。如何从试卷上、试卷背后分析学生的“四基”的掌握情况，进而调整教学的步式，让学生最大限度的提高水准，便是科学有效的“考试观”。本文以2017届湖北省八校第一次联考高三文科数学的一道压轴填空题(第16题)为例，笔者通过与学生的课堂探讨与课下交流，领会到了学生的真正想法，补偿上了一节复习课，效果明显，整理出来，供同行批评指正。

(第16题)已知函数 $f(x) = x^3 - x^2 + (2\sqrt{2} - 3)x + 3 - 2\sqrt{2}$ ， $f(x)$ 与 x 轴依次交于点 A 、 B 、 C ，点 P 为 $f(x)$ 图象上的动点，分别以 A 、 B 、 C 、 P 为切点作函数 $f(x)$ 图象的切线。

- (I) 点 P 处切线斜率最小值为 _____；
(II) 点 A 、 B 、 C 处切线斜率倒数和为 _____。 (*)

(接上页) 上一点，数形结合用的很好。

例题教学环节由学生对例题说变式、说思路、说解法，真正从学生的实际出发，来强化知识方法的落实。

3. 解决问题——说感悟说思想

教师：现在谁能总结一下本节课的内容？

学生11：通过本节课，巩固了解决向量的模有坐标法，基向量法，几何法(数形结合)。特别是数形结合思想很重要。

教师：很好，那谁能说说构造几何图形的基础(依据)由哪些呢？

学生12：主要向量中有明显的几何意义的包括

一、从试题中看反馈

毫无疑问，一次大型的考试应该做到科学有效、规范严谨，有明确的考向性，更给教师的教学“把脉”并提供借鉴。我有幸参与并提交了对文科卷的试卷评价、阅卷分析及教学备考建议，发现客观题远不像解答题一般，解答题有考生的答案痕迹，有迹可循，而客观题都是一个个“冰冷”的答案。我又一次深感过程比结果更“可爱”！

1. 数学崇尚求简精神，解题更是如此

在《中国学生发展核心素养》(征求意见稿)的9大素养中，我个人十分赞同章建跃先生的观点：数学学科应以“科学精神”和“理性思维”为统领。要切实发展学生的数学素养，教师应立足于把数学教得简单而严谨，多设计符合学生发展规律的、自然而清楚的系列教学活动，让学生在感悟鉴赏数学的求简精神中亲近数学，培养理性精神，提高审美情趣。

数学知识逻辑结构的简约、证明方法的简捷、表达形式的简明无不反映出数学的“简”的内涵。命题者尊崇简约大方的风格，让问题变得清爽；答题者按照经济性原则，理应让解题变得自然简洁。

题(*)第(I)问考查曲线上某点处的切线的斜率(导数的几何意义)，即求二次函数的最值，运算量不大；而第(II)问中虽然切点 A 、 B 、 C 处的切线斜率可求，但涉及无理式的整理变形，运算量不小，这应该也不是命题者预想的解题思路。我们自然要追寻简化的

模，夹角，数量积。除此还有向量共线定理，向量的加、减、数乘运算，还包括向量的可平移性等。

参考文献

- 1 章建跃. 树立课程意识, 落实核心素养[J]. 数学通报, 2016, 5: 1-4
- 2 王童童, 王凯. 尝试说题教学, 让课堂充满生机[J]. 数学之友, 2015, 12: 16-18
- 3 李萍. 说题教学的尝试[J]. 数学通讯, 2005, 12: 4-6
- 4 陈雅雅. 对一道2014浙江省教师说题比赛试题的探究[J]. 中学数学教学, 2015, 2: 1-4