如何求解几何体的表面积与体积

■南永德

解决几何体的表面积、体积、三视图与球体体积问题是每年必考的热点问题，主观题与客观题都有，大多数是以三视图知识为铺垫，通过三视图揭示几何体的结构特征计算几何体的表面积、体积。下面具体分析。

一、以几何体与球的内接或外切关系为背景确定几何体的表面积与体积

例 1　如图 1 所示，在三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中，平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，$\triangle PAC\cong\triangle ABC$，$\angle PAC=\angle ACB=90°$，$PA=2$，$AC=2\sqrt{2}$，则三棱锥 $P\text{-}ABC$ 外接球的体积为（　　）。

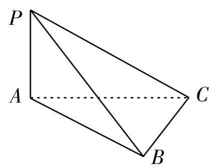

图 1

A.$\frac{32\pi}{3}$　　B.$\frac{38\pi}{3}$

C.14π　　D.16π

分析： 求解几何体的表面积、体积的问题主要集中于棱柱、棱锥与球，因此，解决好这类问题首要的任务是准确熟记公式。重点题型为球与几何体的内接与外切问题。

解： 如图 2 所示，设 PB 的中点为点 O，连接 OA，OC。因为平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，$BC\perp AC$，$PA\perp AC$，所以 $BC\perp$ 平面 PAC，$PA\perp$ 平面 ABC，所以 $BC\perp PC$，$PA\perp AB$。所以 PB 为直角三角形 $\triangle PCB$，$\triangle PAB$ 的公共斜边。而点 O 为 PB 的中点，所以 $OP=OB=OA=OC$，点 O 为三棱锥 $P\text{-}ABC$ 外接球的球心。又因为 $PC=\sqrt{2^2+(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{3}$，且 $PA=BC=2$，所以外接球的半径 $R=\frac{1}{2}PB=2$，故三棱锥 $P\text{-}ABC$ 外接球的体积为 $V=\frac{4\pi}{3}\times2^3=\frac{32\pi}{3}$。答案为 A。

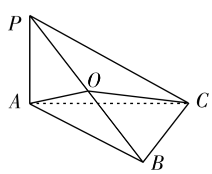

图 2

点评： 求几何体的表面积与体积的思路如下。(1)求表面积问题的思路是将立体几何问题转化为平面问题，即空间图形平面化，这是解决立体几何的出发点。(2)对于不规则几何体求表面积，一般是把所给的几何体分割成柱、锥、台体，然后再求这些柱、锥、台体的表面积，最后通过求和或作差获得几何体的表面积。

二、以三视图为背景求解几何体的表面积与体积

例 2　如图 3 所示，是某几何体的正视图（主视图）、侧视图（左视图）和俯视图，则该几何体的体积为（　　）。

A.$18+20\pi$

B.$24+16\pi$

C.$32+12\pi$

D.$6+\frac{20\pi}{3}$

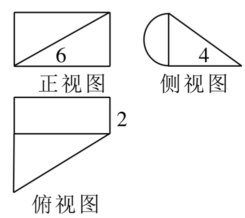

图 3

分析： 解答这类问题的思路一般是先识别三视图，确定三视图所对应的几何体；再求解该几何体的表面积或体积。

解： 由三视图可知，该组合体为如图 4 所示的几何体，其中后半部为一个半圆柱，前半部为一个放倒的四棱锥。由图中所给数据可得圆柱底面的半径为 2，放倒的四棱锥的底面积为 $4\times6=24$，高为 4，故该组合体的体积为 $V=V_{半圆柱}+V_{四棱锥}=\frac{1}{2}\times6\times\pi\times2^2+\frac{1}{3}\times4\times24=32+12\pi$。答案为 C。

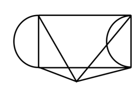
图 4

点评： (1)根据三视图确定几何体时，应当通过三视图明确几何体的整体关系，但是又要注意确定特定的线与面，即要把局部与整体综合起来。(2)解答三视图与几何体的体积、面积的交汇题型时，首先要通过三视图明确几何体的直观图，再利用题设条件求解几何体的体积、面积。同时又要注意通过三视图还原的几何体的直观图的准确性。

作者单位：山东省巨野县第一中学