

基于类比思维的高中数学教学设计

——以“空间几何体的外接球和内切球”为例

于莺彬(山东省青岛第六十六中学)

摘要:以空间几何体的外接球和内切球为例,类比平面问题来帮助学生理解空间问题,激发其学习兴趣,提升数学核心素养。

关键词:类比思维;高中数学;核心素养

文章编号:1002-2171(2023)5-0027-04

1 问题提出

《决策科学词典》中对类比思维进行了详细的定义:所谓类比思维,是以两个事物作为比较对象,这两个事物必须具有相同或相似的特征,再根据与其中一个事物相关的已知特征,去推测另一事物可能存在的相应特征。类比思维将关注的重点放在两个特殊事物中间,并不需要大量的类似事物作为数据和信息的支持^[1]。类比思维主要通过对比事物特征中的相似或不同之处,分析不同事物间的内在联系,从而解决问题。类比思维的应用对教学质量和效率的提升有着很大的帮助,在概念、性质、判定、解法、策略等方面的教学中运用类比推理能够更好地帮助学生记忆、掌握所学知识,使其在探索新知、梳理知识、归纳题型、总结方法、提炼思维的过程中不断激发数学学习的兴趣,培养数学思维和能力、开阔视野,发展数学核心素养。

2 空间几何体的外接球和内切球教学分析

2.1 降维类比

降维类比和升维类比主要应用于立体几何的学习,将空间三维问题降为平面二维或者直线一维问题就是降维类比,反之则为升维类比。在立体几何的学习中,因为高一学生的空间想象能力不足,所以通常需要用降维类比,类比平面问题来帮助学生理解空间问题。

2.2 教学内容分析

球是高考数学命题的热点之一,在近几年高考题

中屡次出现。球经常和其他空间几何体结合命题,考查空间几何体的外接球与内切球的相关知识点。本节课类比平面几何中三角形的外接圆、内切圆的学习过程,学习柱体、锥体的外接球、内切球。因教学内容较多,难点较为集中,因而将本部分教学内容进行优化重组,分为外接球和内切球两个课时。

2.3 学情分析

高一学生在初中已经学习过平面图形的外接圆、内切圆,掌握了求解直角三角形、等边三角形等特殊图形外接圆、内切圆的球心与半径的方法,为本节类比学习空间几何体的外接球、内切球提供了知识基础。但由于高一学生空间想象力尚有不足,对将空间问题转化为平面问题进行求解的意识不深,如何引导学生判断空间几何体外接球、内切球球心的位置,利用通性通法求解球的半径,是本节教学需要解决的重点和难点。

2.4 教学目标

(1)类比平面中几何图形外接圆和内切圆圆心的确定方法,分析柱体、锥体外接球、内切球球心的位置。

(2)能够通过构造直角三角形确定常见几何体外接球、内切球的半径,体会将空间问题转化为平面问题来解决的降维思想,提升直观想象、数学运算素养。

(3)通过由特殊几何体到一般几何体的学习过程,归纳总结出柱体外接球、锥体的外接球和内切球的求解模型,发展逻辑推理素养。

(4)通过概念类比、方法类比、结论类比,引导学生感受立体几何与平面几何的内在联系,体会几何学

研究过程的系统性、整体性。

2.5 教学方法

以问题为核心,让学生提出问题,引导学生自主探究、小组合作、讨论对话、相互交流,最终实现学习目标。教师要由知识的传授者、灌输者转变为学生发现问题、解决问题的帮助者、促进者和课堂教学的组织者、指导者。

3 第一课时“空间几何体的外接球”

培养类比思维的关键在于把已知的问题作为基础情境,给出探究性的问题,让学生在思考中寻求相似点,把未知问题和已知问题联系起来,通过迁移把已知的知识和经验运用到对未知知识的探索上,发现新规律,形成新知识。

3.1 概念类比,引入课题

问题 1 在平面中,几何图形的外接圆如何定义?怎样作出三角形的外接圆?

问题 2 类比平面中外接圆的学习,空间几何体的外接球如何定义?

设计意图:由学生熟悉的平面几何知识(已知问题)入手,感受概念类比,引入研究课题。

3.2 方法类比,探究新知

问题 3 你能类比平面几何中三角形外接圆圆心的确定方法,确定正方体、长方体外接球球心吗?如果是正六棱柱呢?

预设:学生思考讨论得到平面中三角形的外心是各边中垂线的交点,在空间中,多面体的外接球球心就是各面中垂线(即过平面图形外心并垂直于平面的直线)的交点。

追问:为什么三角形中垂线的交点是外心?

预设:学生可以回答出是因为中垂线上的点到两端点的距离相等,所以三条中垂线的交点到三角形三个顶点的距离相等,所以是三角形的外心。

追问:那么我们要求外接球的球心,球心满足的条件是什么?类比外接圆的圆心,你觉得应该如何来求上述几何体的外接球球心呢?

预设:学生通过类比思考可以得到球心满足的条件是到各个顶点的距离相等。类比外接圆,学生思考讨论可以得到对于外接球的球心,应该先作出各个面的中垂线,即找到平面图形的外接圆圆心,然后过此

点作出平面的垂线。以长方体为例,取上底面和下底面的外心联结后取中点即可。

追问:你能求出外接球的直径吗?你有什么发现?

预设:学生通过求正方体、长方体、正六棱柱外接球的直径会发现,这三个多面体外接球的球心就是体对角线的中点。

设计意图:通过层层递进的问题设置,从学生已知的平面图形的外接圆入手,类比线段中垂线的性质想到平面中垂线的性质,从而水到渠成地得到求空间图形外接球的通法,将三维问题降维到二维问题,锻炼了学生的创新思维能力,发展了空间想象素养,提高了学生解决问题的能力。作为研究空间几何体外接球和内切球的第一节课,也教会了学生降维类比的方法,如,球类比圆,平面的中垂线类比线段的中垂线,等等,激发学生积极主动、勇于探索的科学精神,落实能力和素养的培养。

问题 4 如图 1,对于正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$,设高为 h ,底面边长为 a ,请确定其外接球球心的位置,并求出外接球的半径。对于一般的直三棱柱呢?

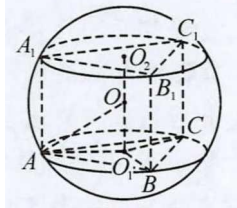


图 1

预设:学生已经知道求外接球球心的通法,找到上下底面的外接圆圆心 O_1 和 O_2 ,联结 O_1O_2 ,取中点 O 即可得到球心。正三棱柱的球心落在上下底面外心连线的中点上,借助勾股定理得 $R^2 = O_1A^2 +$

$$\left(\frac{h}{2}\right)^2, \text{ 可得 } R = \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{h^2}{4}}.$$

设计意图:本题的难点是对半径的计算,需要构造直角三角形,借助勾股定理确定外接球的半径,体会将空间问题转化为平面问题解决的重要思想,提升了直观想象、数学运算等素养。

追问 1:对于一般的直三棱柱呢?

预设:借助由特殊到一般的研究方法,对于一般的直三棱柱,球心落在上下底面外心连线的中点上,借助勾股定理得 $R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2$, 从而 $R = \sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4}}$ 。

追问 2:试分析斜棱柱有没有外接球?

设计意图:引发学生思考,类比平面几何找外接圆圆心的方法,分析能否找到斜棱柱的球心,深化类比思想。

问题 5 如图 2, 如果将直棱柱上下底面和所有水平截面的外接圆作出来, 能得到什么图形? 该图形的外接球是否发生变化? 你能得到什么结论呢?

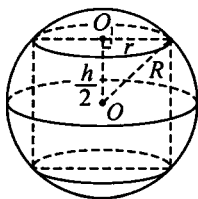


图 2

设计意图: 找到直棱柱与圆柱的联系, 再次巩固求外接球球心的通法。

问题 6 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各顶点都在同一球面上, 若 $AB=AC=AA_1=2$, 且 $\angle BAC=120^\circ$, 求此球的表面积。

预设: 根据柱体外接球半径的求解模型, 需要确定 $\triangle ABC$ 的外接圆半径, 可以通过在平面几何中找中垂线的交点, 也可以借助正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r$ 来确定外接圆半径, 求得 $r=2$ 。由 $R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2$, 可得 $R = \sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4}} = \sqrt{5}$, 所以 $S = 4\pi R^2 = 20\pi$ 。

问题 7 如图 3, 类比圆柱外接球的研究方法, 思考如何确定圆锥外接球的球心位置与半径?

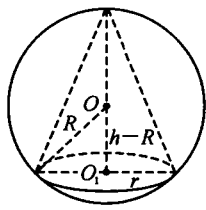


图 3

追问: 在此基础上, 你能尝试求出正三棱锥的外接球球心与半径吗? 该方法对其他的正棱锥适用吗?

预设: 如图 4, 在圆锥底面边缘等距离取若干个, 与上顶点构成正棱锥(高考常考正三棱锥、正四棱锥)。类比正棱柱外接球半径的确定方法, 构造外接球球心, 借助勾股定理, 可确定 R 。

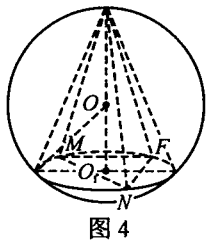


图 4

问题 8 如图 5, 正四面体棱长为 a , 求其外接球的半径。

预设: 根据正三棱锥外接球半径的求解模型, 求出底面三角形的外接圆半径 $r = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ 。由 $R^2 = r^2 + (h-R)^2$, $h = \frac{\sqrt{6}}{3}a$, 可求得 $R = \frac{\sqrt{6}}{4}a$ 。

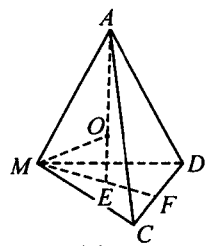


图 5

设计意图: 学生掌握正方体和长方体的外接球后, 通过问题组的形式引导学生采用降维类比的方法

探究正三棱柱、直棱柱、圆柱、圆锥、正棱锥的外接球, 从简到繁, 引发学生深层思考, 从而归纳总结出柱体外接球、锥体外接球的求解模型, 发展逻辑推理素养。通过众多特殊几何体的探究, 学生充分感受立体几何与平面几何的内在联系, 深刻理解类比的思想方法, 体会几何学研究过程的系统性、整体性。

3.3 结论类比, 总结提升

思考: 对于一般的三棱锥, 是否一定存在外接球? 如果有, 外接球的球心位置如何确定? 四棱锥呢?

设计意图: 类比平面中三角形一定存在外接圆, 可得到三棱锥一定存在外接球, 球心的位置就是四个面中垂线的交点; 类比平面中四边形有两个对角是直角时存在外接圆, 可猜想四棱锥不一定存在外接球, 当满足四面体有两个面垂直时, 可能存在外接球。思考题的设置, 加深学生对外接球的思考, 使得本节课的内容更加系统完善。

3.4 归纳小结

本节课你学会了哪些空间几何体的外接球的作法? 确定外接球的关键是什么? 如何求? 学习过程中你用到了哪些数学思想方法?

4 第二课时“空间几何体的内切球”

4.1 概念类比, 引入课题

问题 1 在平面几何中, 三角形的内切圆如何定义? 如何找到三角形内切圆的圆心?

问题 2 类比平面几何中内切圆的定义, 在空间中, 几何体的内切球如何定义呢?

设计意图: 由学生熟悉的平面几何知识入手, 感受概念类比, 引入研究课题。基于上节课外接球降维类比思想方法的学习和运用, 本节课的学习是对类比思维的加深和巩固, 教师应更多地放手让学生去自主探究和学习。

4.2 方法类比、探究新知

问题 3 棱长为 a 的正方体, 你能确定其内切球球心与半径吗? 如果是长方体呢?

问题 4 你能类比平面几何中三角形内切圆圆心的确定方法, 找出正三棱锥内切球球心的位置吗? 内切球与每个面的切点在哪里?

设计意图: 在外接球中学生已经能够掌握简单的降维类比, 所以问题 3、问题 4 让学生自主思考、讨论

展示,学生能类比在平面中,三角形的内心是各角平分线的交点,在空间中,多面体的内切球球心是各面形成的二面角平面角的角平分线的交点;在正三棱锥中,球心在高线上,内切球与每个侧面的切点位置在各侧面过顶点的中线上。将空间角类比到平面角,将空间线类比到平面线,进一步深化类比的思想方法。

问题 5 如何求解正三棱锥内切球的半径?此方法对求其他的正棱锥的内切球是否适用?

预设:画出内切球的截面图,将空间问题转化为平面问题解决。如图 6,正三棱锥的内切球球心落在高线上,借助相似三角形各边成比例

建立等式 $\frac{OE}{DH} = \frac{PO}{PD}$, 解出 r 。

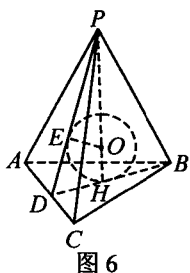


图 6

问题 6 正四面体的棱长为 a , 求其内切球的半径 r 。

预设:根据正三棱锥内切球半径的求解模型,由

$\frac{OE}{DH} = \frac{PO}{PD}$, 可求得 $r = \frac{\sqrt{6}}{12}a$ 。

追问:还有其它方法可以求解正四面体的内切球半径吗?

预设:发散思维,学生可能会考虑用等体积法求解。

4.3 结论类比,总结提升

思考:在正三角形中,其外接圆与内切圆的圆心有怎样的位置关系?两圆的半径有何比例关系?在空间中,正四面体的外接球与内切球球心与半径又有怎样的关系呢?

预设:类比平面中正三角形外接圆与内切圆圆心重合,且外接圆半径与内切圆半径分中线之比为 2:1;在空间中,正四面体外接球与内切球球心重合,且外接球半径与内切球半径分高线之比为 3:1。

设计意图:作为外接球和内切球的第二节课,应该注重知识的系统性,在本节的最后给出这样的思考题,意在使学生借助特殊的几何体(正四面体)将外接球和内切球的知识串联,进一步深化类比思想,理解平面几何与空间几何的内在联系,形成对几何学整体的认知。

4.4 归纳小结

本节课你学会了哪些空间几何体的内切球的作法?确定内切球的关键是什么?如何求?学习过程

中你用到了哪些数学思想方法?

5 教学反思

高中阶段数学学科的公式较多且关系复杂,题目的变化性强,知识的综合性更强,对学生的理解能力和思维能力都提出了更高的要求。以往在进行“球”这部分的新课讲授时,很多教师就题讲题,主要分析几个几何体模型外接球和内切球的情况,而不讲通法,学生对这部分知识的了解片面且不系统,一旦题目给出的几何体模型不是常规的柱体或椎体,学生往往无从下手。笔者在此教学设计中注重以下几点:

第一,注重类比思想方法的应用。借助平面图形的外接圆和内切圆来推导立体图形的外接球和内切球,并归纳总结相关的性质,符合学生的认知规律,也激发了学生的探究热情,培养了其类比思维能力,教给了他们解决问题的思路和方法。类比思维的作用不仅体现在教学的过程中,对学生未来的发展也有着深远的影响。借助这一思想,学生可以将复杂难懂的概念或内容简单化、具象化,这些概念或内容再经过演绎就很容易理解了^[2]。

第二,注重数形结合思想方法的深化。立体几何的学习离不开看图、作图,需要一定的空间想象能力,本部分的教学对作图的要求比较高,一是需要各种立体图形的综合作图,二是需要规范作图,因此在教学中注重对数形结合思想方法的深化就显得尤为重要。

这两节课笔者主要借助立体几何学习中常用的降维类比,先从概念进行类比,然后从方法进行类比,特别是在求外接球球心和内切球球心方法上的类比,让学生体会类比并不是浮于表面,而是要从中体会内在的相似性,这也为学生后续学习立体几何提供了可供参考的模板,也渗透了立体几何学习的转化思想。课堂教学是进行类比思维训练的主阵地,只有构建适宜的课堂环境,才能实现培养学生类比思维的目标。在教学中,教师要结合教材内容,合理设置问题,鼓励学生思考和探究,利用已有的知识和生活经验进行类比,实现知识的迁移,从而达到良好的教学效果。

参考文献:

- [1] 萧浩辉. 决策科学辞典[M]. 北京:人民出版社,1995.
- [2] 何建安,王玉宏. 探究类比思维在高中数学教学及解题中的应用[J]. 教育观察,2020,9(11):78-79.