

做题不能追求数量,而要讲究质量,要学会以点带面,多角度理解,只有这样才能跳出题海的怪圈.选择好题,选择成功!为此,我们特推荐以下习题,希望同学们能够融会贯通,学以致用,从多种角度分析思考、积极探索解题规律,摸索出获得最优解法的途径.

概率、统计、排列、组合、二项式定理

第一轮复习测试题

■安徽 李子文

一、选择题

1. 甲校有3 600名学生,乙校有5 400名学生,丙校有1 800名学生,为统计学生某方面的情况,计划采用分层抽样法,抽取一个容量为90人的样本,应从甲校、乙校和丙校抽取的学生的人数分别为().

- A. 30,30,30 B. 30,45,15
C. 20,30,10 D. 30,50,10

2. 为了了解某地区高三学生的身体发育情况,抽查了该地区100名年龄为17岁~18岁的男生的体重(单位:kg),将数据分为11组,即[54.5,56.5]、(56.5,58.5]、(58.5,60.5]、...、(74.5,76.5],得到如图1所示的频率分布直方图.根据图1可得这100名学生中体重在(56.5,64.5]内的学生的人数是().

- A. 20 B. 30 C. 40 D. 50

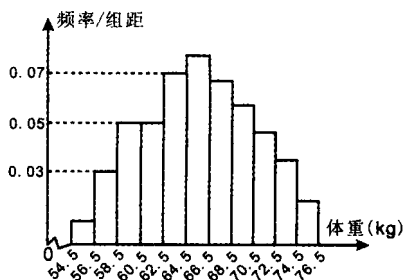


图1

3. 某小组有6名女生和8名男生,这14名同学站成一排,其中A、B、C、D这4名女生必须排在一起,且另外2名女生互不相邻也不与A、B、C、D这4名女生相邻,则不同的排法的种数是().

- A. $A_8^2 \cdot A_8^6$ B. $A_8^4 \cdot A_8^6 \cdot A_4^4$
C. $A_8^8 \cdot A_3^3 \cdot A_4^4$ D. $A_8^5 \cdot A_8^5 \cdot A_4^4$

4. 如果 $(3x^2 - \frac{2}{x^3})^n$ 的展开式中含有非零常数项,则正整数n的最小值为().

- A. 3 B. 5 C. 6 D. 10

5. 编号为1、2、3、4、5的5个人,分别坐在编号为1、2、3、4、5的座位上,则至多有2个号码一致的坐法的种数为().

- A. 120 B. 119 C. 110 D. 109

6. 设 ξ 是离散型随机变量, $P(\xi=a) = \frac{2}{3}$, $P(\xi=b) = \frac{1}{3}$, $a < b$, $E\xi = \frac{4}{3}$, $D\xi = \frac{2}{9}$, 则 $a+b$ 的值为().

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{7}{3}$ C. 3 D. $\frac{11}{3}$

7. 设随机变量 $\xi \sim N(0,1)$, 若 $P(\xi > x) = m$ ($0 < m < 1$), 则 $P(|\xi| \leq x)$ 的值等于().

- A. $\frac{m}{2}$ B. $1 - \frac{m}{2}$ C. $\frac{1-m}{2}$ D. $1-2m$

8. 已知随机变量 ξ 的分布列如表1所示.

表1

ξ	-2	-1	0	1	2	3
P	$\frac{1}{12}$	m	n	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

已知 $m, n \in [0,1]$, 且 $E\xi = \frac{1}{6}$, 则 m, n 的值分别为().

- A. $\frac{1}{12}, \frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{6}, \frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$

9. 某农贸市场出售西红柿,当价格上涨时,供给量相应增加,而需求量相应减少,具体调查结果如表2和表3所示.

表2:市场供给量

单价(单位:元/kg)	2	2.4	2.8	3.2	3.6	4
供给量(单位:t)	50	60	70	75	80	90

表3:市场需求量

单价(单位:元/kg)	4	3.4	2.9	2.6	2.3	2.1
需求量(单位:t)	50	60	65	70	75	80

根据题中提供的信息,市场供需平衡点(即供给量和需求量相等时的单价)应在区间()内.

- A. (2.3,2.4) B. (2.4,2.6)
C. (2.6,2.8) D. (2.8,2.9)

10. 如图2,在长为60 m、宽为40 m的矩形场地上有一个椭圆形草坪,在一次大风后,发现该场地内共落有300片树叶,其中落在椭圆外的树叶为96片,以此数据为依据,可以估计出草坪的面积约为() m^2 .

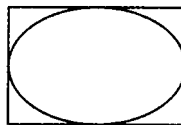


图2

- A. 768 B. 1 632 C. 1 732 D. 868

11. 有3个相识的人在某天各自乘同列火车外出.假设该火车有10节车厢,那么至少有2个人在同车厢内的概率是().

- A. $\frac{29}{200}$ B. $\frac{7}{25}$ C. $\frac{29}{144}$ D. $\frac{7}{18}$

12. 将1、2、3、...、9这9个数字填在表4的9个空格中,要求每一行从左到右、每一列从上到下依次增大,当3、4固定在表中的位置时,填写空格的方法总数为().

表4

	3	
	4	

A. 6 B. 12 C. 18 D. 24

二、填空题

13. 身高不等的5人站成一排,从中间向两边看,一个比一个矮的概率为_____.

14. 有写着0、1、5、6的4张卡片,如果允许6作9用,那么从中任抽3张,能组成_____个三位数.

15. 甲、乙去某大学参加自主招生考试,若该校只招5人,甲、乙同时被招进的概率为 $\frac{1}{19}$,由此可推断参加考试的人数为_____.

16. 定义集合A与B的差集 $A-B=\{x|x\in A, \text{且} x\notin B\}$,记“从集合A中任取1个元素 $x, x\in A-B$ ”为事件E,“从集合A中任取1个元素 $x, x\in A\cap B$ ”为事件F; $P(E)$ 为事件E发生的概率, $P(F)$ 为事件F发生的概率.当 $a, b\in\mathbb{Z}$,且 $a<-1, b\geq 1$ 时,设集合 $A=\{x\in\mathbb{Z}|a<x<0\}$,集合 $B=\{x\in\mathbb{Z}| -b<x<b\}$.给出以下判断:

①当 $a=-4, b=2$ 时, $P(E)=\frac{2}{3}, P(F)=\frac{1}{3}$;

②总有 $P(E)+P(F)=1$ 成立;

③若 $P(E)=1$,则 $a=-2, b=1$;

④ $P(F)$ 不可能等于1.

其中所有正确判断的序号为_____.

三、解答题

17. 在 $(1+x)^m+(1+x)^n (m, n\in\mathbb{N}, \text{且} m\geq 2, n\geq 2)$ 的展开式中, x 的系数为21,问: m, n 为何值时, x^2 的系数最小?

18. 在某次数学考试中,甲、乙、丙3人及格(甲、乙、丙是否及格互不影响)的概率分别为0.4、0.2、0.5,考试结束后,最容易出现几个人及格?

19. 某市出租车的起步价为6元,行驶路程不超过3 km时,收费6元,若行驶路程超过3 km,则按每超出1 km(不足1 km也按1 km计程)收费3元计费.设出租车一天行驶的路程数 ξ (单位:km,不足1 km的按1 km计程)是一个随机变量,则其收费也是一个随机变量.已知一个司机在某个月每次出车都超过了3 km,且一天的总路程数可能的取值是200、220、240、260、280、300(单位:km),它们出现的概率依次是0.12、0.18、0.20、0.20、0.10、0.04.

(1)求这一个月中一天行驶的路程 ξ 的分布列,并求 ξ 的数学期望和方差.

(2)求这一个月中一天所收租车费 η 的数学期望和方差.

20. 为检验回答一个问题的对错是否和性别有关,有人作了一次调查,其中女生人数是男生人数的 $\frac{1}{2}$,男生答对问题的人数占男生人数的 $\frac{5}{6}$,女生答错问题的人数占女生人数的 $\frac{2}{3}$.

(1)若有99%的把握认为回答结果的对错和性别有关,则男生至少有多少人?

(2)若回答结果的对错和性别有关的概率不超过95%,则男生至多有多少人?

21. 某城市在中心广场建造一个花圃,花圃分为6个区域(如图3),现要栽种4种不同颜色的花,每个区域栽种1种且

相邻部分不能栽种同样颜色的花,不同的栽种方法有多少种?

22. 现有甲、乙2个盒子,甲盒中装有4个白球和4个红球,乙盒中装有3个白球和 $n(n\geq 2)$ 个红球.若从乙盒中任取2个球,取到同色球的概率是 $\frac{13}{28}$.

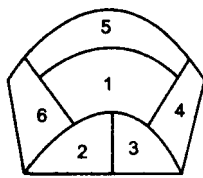


图3

(1)求乙盒中红球的个数.

(2)若从甲盒中任取2个球放入乙盒中,再从乙盒中任取2个球放回到甲盒中,求甲盒中白球增加的概率.

参考答案与提示

1. B 提示:设从甲校、乙校和丙校抽取的学生的人数分别为 a, b, c ,则 $\frac{90}{3600+5400+1800}=\frac{a}{3600}=\frac{b}{5400}=\frac{c}{1800}$,解得 $a=30, b=45, c=15$.

2. C 提示:由 $\frac{\text{频率}}{\text{组距}} \times \text{组距} = \text{频率}$,且 $\text{频率} = \frac{\text{频数}}{\text{样本容量}}$,得所求人数为 $100 \times (0.03 + 0.05 \times 2 + 0.07) \times 2 = 40$.

3. C 提示:先将8名男生排成一行,再将A、B、C、D这4名女生视为1个元素,不妨记为 a ,将另外2名女生视为2个元素,不妨记为 b, c ,将 a, b, c 这3个元素插入8个男生形成的9个空位中,要注意A、B、C、D这4名女生可交换位置.

4. B 提示: $\left(3x^2 - \frac{2}{x^3}\right)^n$ 的展开式中,第 $r+1$ 项是 $T_{r+1} = C_n^r (3x^2)^{n-r} \left(-\frac{2}{x^3}\right)^r = C_n^r 3^{n-r} 2^r x^{2n-3r}$.令 $2n-3r=0$,得 $r=\frac{2}{3}n$.

5. D 提示:恰有3个号码一致的坐法的种数为 C_5^3 ,5个号码全一致的坐法的种数为1,则至多有2个号码一致的坐法的种数为 $A_5^5 - C_5^3 - 1 = 109$.

6. C 提示: $E\xi = \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b = \frac{4}{3}, D\xi = \frac{2}{3}\left(a - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(b - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$.

7. D 提示: $P(\xi \leq x) = 1 - P(\xi > x) = 1 - m, P(\xi < -x) = P(\xi > x) = m$,则 $P(|\xi| \leq x) = P(\xi \leq x) - P(\xi < -x)$.

8. D 提示: $\frac{1}{12} + m + n + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = 1, E\xi = (-2) \cdot \frac{1}{12} - m + \frac{1}{12} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$.

9. C 提示:当单价位于区间(2.6, 2.8)内时,供给量位于区间(60, 70)内,需求量位于区间(65, 70)内.

10. B 提示:根据随机模拟的思想,可以认为树叶落在该场地上是随机的,则椭圆草坪的面积和整个矩形场地的面积之比就近似地等于落在椭圆草坪上的树叶的数目和落在整个矩形场地上的树叶的数目之比.

11. B 提示:设A表示“至少有2个人在同车厢内”,则 $\bar{A}$





表示“3人分别在3节车厢内”. $P(\bar{A}) = \frac{A_{10}^3}{10^3}$, $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

12. A 提示:由题意可知1,2,9只能填在表5中所示的位置.5,6,7,8排在其余4格,由题意得只需从5,6,7,8中选2个按要求排在第3行,最后剩下的2个数字排在第3列即可.

表 5

1	3	
2	4	
		9

13. $\frac{1}{20}$ 提示:5人站一排有 $A_5^5 = 120$ (种)情形.从中间向两边看,一个比一个矮,可这样考虑:先安排最高者站中间,再从剩下的4人中任选2人按高矮要求站左边,有 $C_4^2 = 6$ (种)情形,余下的2人按高矮要求站右边.

14. 32 提示:可分为2类.第1类,不用6,有 $A_2^1 \cdot A_2^2$ 个满足题意的数;第2类,用6,有 $2(A_3^3 + C_2^1 \cdot A_2^1 \cdot A_2^2)$ 个满足题意的数.

15. 20 提示:设参加考试的人数为 n ,由题意得 $\frac{C_{n-2}^3}{C_n^5} = \frac{1}{19}$,解得 $n = 20$.

16. ①②③ 提示:当 $a = -4, b = 2$ 时, $A = \{-3, -2, -1\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$, $A - B = \{-3, -2\}$, $A \cap B = \{-1\}$, 则 $P(E) = \frac{2}{3}$, $P(F) = \frac{1}{3}$. $(A - B) \cup (A \cap B) = A$, 则 $P(E) + P(F) = 1$. 若 $P(E) = 1$, 即从集合 A 中任取1个元素 $x, x \in A - B$, 则 $A \subseteq A - B$, 也就是说集合 A 与 B 的交集为空集, 故 $a = -2, b = 1$. 若 $P(F) = 1$, 即从集合 A 中任取1个元素 $x, x \in A \cap B$, 则 $A \subseteq A \cap B$, 故 $b \geq -a$ 即可.

17. 由 x 的系数为21, 得 $m + n = 21$, 则 x^2 的系数为 $C_m^2 + C_n^2$. $C_m^2 + C_n^2 = \binom{n-21}{2} + \frac{399}{4}$. 由于 $n \in \mathbb{N}$, 则当 $n = 10$ 或 11 时, $C_m^2 + C_n^2$ 取得最小值, 即当 $\begin{cases} m=11, \\ n=10 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=10, \\ n=11 \end{cases}$ 时, x^2 的系数最小.

18. 3人都及格的概率 $p_1 = 0.4 \times 0.2 \times 0.5 = 0.04$, 3个人都不及格的概率 $p_2 = 0.6 \times 0.8 \times 0.5 = 0.24$, 恰有2人及格的概率 $p_3 = 0.4 \times 0.2 \times 0.5 + 0.4 \times 0.8 \times 0.5 + 0.6 \times 0.2 \times 0.5 = 0.26$, 只有1人及格的概率 $p_4 = 1 - 0.04 - 0.24 - 0.26 = 0.46$, 则最容易出现的是只有1人及格的情况.

19. (1) 由 $0.12 + 0.18 + 0.20 + 0.20 + 100a^2 + 3a + 4a = 1$, 解得 $a = -0.1$ (舍去) 或 $a = 0.03$. $100a^2 + 3a = 0.18, 4a = 0.12$. ξ 的分布列如表6所示.

表 6

ξ	200	220	240	260	280	300
P	0.12	0.18	0.20	0.20	0.18	0.12

$E\xi = 200 \times 0.12 + 220 \times 0.18 + 240 \times 0.20 + 260 \times 0.20 + 280 \times 0.18 + 300 \times 0.12 = 250$, $D\xi = 50^2 \times 0.12 + 30^2 \times 0.18 + 10^2 \times 0.20 + 10^2 \times 0.20 + 30^2 \times 0.18 + 50^2 \times 0.12 = 964$.

(2) $\eta = 3\xi - 3(\xi > 3, \xi \in \mathbb{Z})$, 则 $E\eta = E(3\xi - 3) = 3E\xi - 3 = 3 \times 250 - 3 = 747$, $D\eta = D(3\xi - 3) = 3^2 D\xi = 8\ 676$.

20. 设男生人数为 x , 可得如表7所示的列联表.

表 7

	对	错	合计
男生	$\frac{5x}{6}$	$\frac{x}{6}$	x
女生	$\frac{x}{6}$	$\frac{x}{3}$	$\frac{x}{2}$
合计	x	$\frac{x}{2}$	$\frac{3x}{2}$

(1) 若有99%的把握认为回答结果的对错和性别有关,

$$\text{则 } K^2 > 6.635, \text{ 即 } \frac{\frac{3x}{2} \left(\frac{5x}{6} \times \frac{x}{3} - \frac{x}{6} \times \frac{x}{6} \right)^2}{x \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot x} = \frac{3x}{8} > 6.635 \Rightarrow$$

$$3x > 53.08.$$

因为 $\frac{x}{6}$ 为整数, 若有99%的把握认为回答结果的对错和性别有关, 则男生至少有18人.

(2) 若回答结果的对错和性别有关的概率不超过95%,

$$\text{则 } K^2 \leq 3.841, \text{ 即 } \frac{\frac{3x}{2} \left(\frac{5x}{6} \times \frac{x}{3} - \frac{x}{6} \times \frac{x}{6} \right)^2}{x \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot x} = \frac{3x}{8} \leq 3.841 \Rightarrow$$

$$3x \leq 30.728.$$

因为 $\frac{x}{6}$ 为整数, 若回答结果的对错和性别有关的概率不超过95%, 则男生至多有6人.

21. 可分为2类.

第1类, 6, 5, 1, 2这4个区域栽种4种不同颜色的花. 先在6, 5, 1, 2这4个区域栽种不同颜色的花, 有 A_4^4 种栽种方法; 再栽种区域3, 4, 有3种栽种方法. 根据分步乘法计数原理, 有 $A_4^4 \times 3 = 72$ (种)不同的栽种方法.

第2类, 在6, 5, 1, 2这4个区域中, 区域2, 5栽种相同颜色的花. 先栽种区域6, 5, 1, 有 A_3^3 种栽种方法; 再栽种区域2, 与5相同, 有1种栽种方法; 最后栽种区域3, 4, 有2种栽种方法. 根据分步乘法计数原理, 有 $A_3^3 \times 1 \times 2 = 48$ (种)不同的栽种方法.

根据分类加法计数原理, 共有 $72 + 48 = 120$ (种)不同的栽种方法.

22. (1) 由题意得 $\frac{C_3^2 + C_n^2}{C_{n+3}^2} = \frac{13}{28}$, 解得 $n = 5$, 即乙盒中有5个红球.

(2) 若甲盒中白球增加了, 则有2类情况.

第1类, 从甲盒中取出2个红球放入乙盒中, 再从乙盒中取出2个白球或1个白球、1个红球放入甲盒中, 概率为 $\frac{C_4^2}{C_8^2} \cdot \frac{C_3^2 + C_3^1 \cdot C_1^1}{C_{10}^2} = \frac{4}{35}$.

第2类, 从甲盒中取出1个红球和1个白球放入乙盒中, 再从乙盒中取出2个白球放入甲盒中, 概率为 $\frac{C_4^1 \cdot C_1^1}{C_8^2}$.

$$\frac{C_4^2}{C_8^2} = \frac{8}{105}.$$

$$\text{所求概率为 } \frac{4}{35} + \frac{8}{105} = \frac{4}{21}.$$

(责任编辑 袁伟刚)