

○研究生园地○

几何画板融入立体几何教学的实践研究^{*}

——以“圆柱、圆锥、圆台的表面积和体积”教学设计为例

冯娜 杨慧 温瑞萍 陈露

(太原师范学院数学与统计学院,030619)

摘要:本文以“圆柱、圆锥、圆台的表面积和体积”的教学设计为例,探讨借助几何画板展现圆柱、圆锥、圆台的动态形成过程,将思维过程可视化地呈现给学生,感受“以直代曲”和极限分割的数学思想.

关键词:几何画板;圆柱;圆锥;圆台;以直代曲

《普通高中数学课程标准(2017年版)》凝练出六大数学核心素养,其中包括直观想象素养.直观想象也是发现和提出分析和解决数学问题的重要手段,是探索和形成论证思路、进行逻辑推理、构建抽象结构的思维基础^[1].而立体几何能很好地培养学生的直观想象能力.

本文探讨在立体几何教学中借助几何画板辅助教学,利用计算机软件呈现空间几何体,将思维过程可视化地呈现给学生,帮助他们建立空间观念,初步感受极限数学思想,提升直观想象素养.

一、问题提出

内容选自普通高中教科书《数学》必修第二册(人教A版)(2019)第八章.在旧教材的基础上修订为“棱柱、棱锥、棱台的表面积和体积”与“圆柱、圆锥、圆台、球的表面积与体积”两个课时.在内容安排上能更好地类比“棱柱、棱锥、棱台的表面积与体积”得到“圆柱、圆锥、圆台、球的表面积与体积”,在感受“平面”与“曲面”的不同中,理解“以直代曲”的数学思想.但新旧教材都偏向于直接呈现

出立体图形的表面积和体积公式.在实际教学过程中,可以通过利用几何画板可视化地给学生呈现“圆柱、圆锥、圆台表面积和体积公式”的形成的思维过程,以提高学生的直观想象素养,初步感受极限数学思想.

二、教学设计

1. 迁移导入

问题1 展示水杯、建筑物、皮球等现实生活中常见的立体图形,让学生辨析多面体和旋转体二者的异同点,类比多面体表面积和体积公式推导,思考旋转体的表面积与体积如何推导.

(1) 相同点:两者都是封闭的几何体,包括表面及内部的所有点.

(2) 不同点:多面体的表面是平面多边形,旋转体的表面有的是平面,有的是曲面.

设计意图 通过实物图片比较多面体和旋转体异同点,让学生从实物中抽象出立体图形,阐明探究旋转体表面积和体积公式既与实际生活相关,又是数学自身发展的需要.

2. 圆柱、圆锥、圆台的表面积公式

回顾棱柱、棱锥、棱台表面积公式推导方

^{*} 本文系山西省研究生教育教学改革课题优秀课程、教材、案例库建设立项项目(项目编号:2021YJJC280)研究成果.

法,即表面积 = 侧面积 + 底面积,观察几何画板制作的圆柱、圆锥、圆台动态展开过程,尝试构建圆柱、圆锥、圆台的表面积公式.

设计意图 构建已学知识与本节知识的联系,引导学生进行知识迁移,发现可以类比基本推导思想,即各个面的表面积的和,思考如何将曲面和平面建立联系,观察几何画板绘制的圆柱、圆锥、圆台动态展开图,引导学生通过“以直代曲”的方法推导圆柱、圆锥、圆台的表面积.

(1) 观察图 1,圆柱侧面展开图为矩形,可得 $S_{\text{圆柱侧}} = 2\pi rl, S_{\text{圆柱}} = 2\pi rl + 2\pi r^2 = 2\pi r(l + r)$.

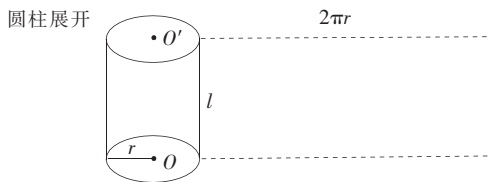


图 1

(2) 观察图 2 可得圆锥的侧面展开图为扇形,如果将扇形 OAB 分成 n 份,当 n 越大,每一段圆弧可近似为一条线段,每个小扇形可近似为以半径为腰、弧长为底的等腰三角形^[2],通过极限分割达到“以直代曲”的目的,所以 $S_{\text{扇形}} = \frac{1}{2}cl = \frac{1}{2} \times 2\pi r \times l, S_{\text{圆锥}} = \pi rl + \pi r^2 = \pi r(l + r)$.

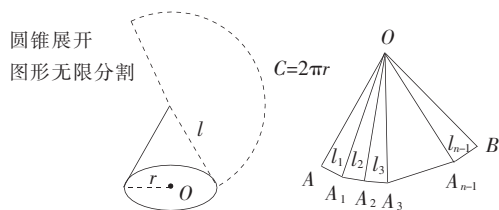


图 2

(3) 观察图 3,可得圆台的侧面展开图为扇环,扇环面积等于大扇形与小扇形面积的差,那么圆台的侧面展开图可看作大“等腰三角形”截去“小等腰三角形”所形成的“等腰梯形”,因此可以用梯形公式来记忆圆台的侧面积公式,其中圆台的上底面半径为 r' ,下底

面半径为 r ,母线长为 l . 可得 $S_{\text{圆台侧}} = S_{\text{扇环}} = \frac{1}{2}(2\pi r' + 2\pi r)l = \pi(r + r')l$,其中 $S_{\text{圆台上底面}} = \pi r'^2, S_{\text{圆台下底面}} = \pi r^2$. 故 $S_{\text{圆台}} = \pi(r + r')l + \pi r'^2 + \pi r^2 = \pi(r'l + rl + r'^2 + r^2)$.

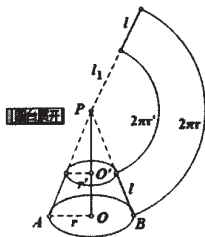


图 3

设计意图 几何画板动态展开和极限分割的过程,有利于学生直观地把空间曲面展开成平面图形“化曲为直”后转化为求平面图形的面积,通过极限分割扇形为三角形再次“化曲为直”,从而加深理解并记忆圆锥和圆台的表面积公式.

3. 圆柱、圆锥、圆台的体积公式

类比棱柱、棱锥、棱台的体积推导方式,即体积 = 底面积 $\times$ 高,仔细观察圆柱、圆锥、圆台的动态形成过程,思考如何推导圆柱、圆锥、圆台的体积公式.

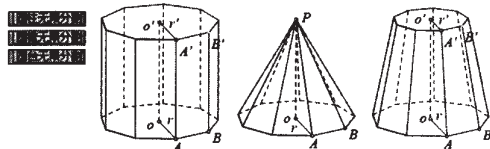


图 4

图 5

图 6

(1) 观察图 4,得圆柱的上下底面为两个相等的圆,而“圆”可以类比“扇形”通过极限分割“化曲为直”的思想,将“圆”的面积类比为“三角形”的面积,在圆柱上底面取两点 A', B' ,下底面取等距离两点 A, B ,连结上底面圆心 O' 和下底面圆心 O ,得到封闭的立体几何图形三棱柱,将圆柱极限分割成 n 个正三棱柱时,圆柱体积可近似为棱柱体积, $V_{\text{棱柱}} = Sh$,可得 $V_{\text{圆柱}} = Sh = \pi r^2 h$.

(2) 观察图 5,得圆柱与圆锥的底面和高相同,探究体积是否相等引入,继续类比,通

过极限分割“化曲为直”的思想,在圆锥底面上任取两点 A, B , 与底面圆心 O 和顶点 P 相连, 可以构成封闭的立体图形直三棱锥 $POAB$, 将圆锥底面无限分割成 n 个直三棱锥时, $\widehat{AB}$ 可以近似看为直线段 AB , 则圆锥体积可以近似为直三棱锥体积, $V_{\text{直三棱锥}} = \frac{1}{3}Sh$, 得到 $V_{\text{圆锥}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

(3) 观察图6, 继续沿用同样的思想, 思考圆台的体积如何“化曲为直”, 在圆台上底面取两点 A', B' , 下底面取等距离两点 A, B , 连结上底面圆心 O' 和下底面圆心 O , 得到封闭的立体几何图形三棱台, 类比棱台的体积公式, $V_{\text{棱台}} = \frac{1}{3}h(S' + \sqrt{S'S} + S)$, 可得 $V_{\text{圆台}} = \frac{1}{3}\pi h(r'^2 + r'r + r^2)$.

设计意图 几何画板动态展示极限分割过程, 学生深刻体会极限思想, 从而类比多面体体积公式推导出旋转体体积公式, 经历整个探究学习过程后, 更加深刻地理解和掌握公式.

4. 圆柱、圆锥、圆台的表面积和体积公式深化拓展

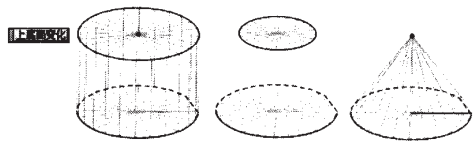


图7

(1) 观察图7-8, 直观感受圆柱、圆锥、圆台的区别和联系.

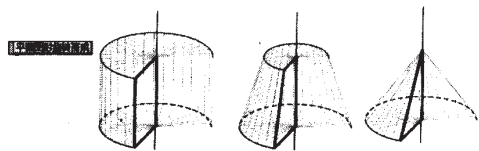


图8

① 联系: 圆柱、圆锥、圆台都可以看作是

由一个平面图形绕它所在平面内一条定直线旋转所形成的几何体, 而且圆柱和圆锥都可以看作是圆台退化而成的几何体.

② 区别: 旋转的初始平面不同, 圆柱、圆锥、圆台上底面不同.

(2) 观察圆柱、圆锥、圆台的表面积公式, 发现它们之间的联系. $S_{\text{圆锥}} = \pi r(l+r) \xleftarrow{r'=0} S_{\text{圆台}} = \pi(r'l + rl + r'^2 + l) \xrightarrow{r=r'} S_{\text{圆柱}} = 2\pi r(l+r)$.

(3) 观察柱体、锥体和台体的体积公式, 发现正 n 棱柱、正 n 棱锥和正 n 棱台, 当 n 越大时, 体积公式之间的关系^[2] (如图9).

$$\begin{array}{ccccc}
 V_{\text{正棱柱}} = Sh & \xleftarrow{S=S'} & V_{\text{正棱台}} = \frac{1}{3}h(S' + \sqrt{S'S} + S) & \xrightarrow{S'=0} & V_{\text{正圆锥}} = \frac{1}{3}Sh \\
 \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\
 V_{\text{圆柱}} = \pi r^2 h & \xleftarrow{r=r'} & V_{\text{圆台}} = \frac{1}{3}\pi h(r'^2 + r'r + r^2) & \xrightarrow{r'=0} & V_{\text{圆锥}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h \\
 \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\
 V_{\text{棱柱}} = Sh & \xleftarrow{S=S'} & V_{\text{棱台}} = \frac{1}{3}h(S' + \sqrt{S'S} + S) & \xrightarrow{S'=0} & V_{\text{棱锥}} = \frac{1}{3}Sh
 \end{array}$$

图9

设计意图 在几何画板绘制的立体图形展开平铺成平面图形与表面积和体积公式推导过程中, 通过动态极限分割, 以达到“以直代曲”相联系, 结合上底面之间可以相互转化的动态变换以及通过平面图形旋转而成的过程, 继续观察表面积和体积公式之间的联系, 数与形紧密结合, 通过圆柱、圆锥、圆台之间的关系深刻把握柱体、锥体和台体之间的联系, 培养学生直观想象素养和逻辑推理能力.

综上所述, 借助几何画板辅助教学, 利用数字技术资源动态地呈现空间几何体, 将思维过程可视化地呈现给学生, 让学生深刻理解几何体之间的联系, 感受动态变化过程, 建构空间观念, 提升核心素养, 领悟数学思想.

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准 (2017年版 2020年修订) [S]. 北京: 人民教育出版社, 2020.
- [2] 翟洪亮. 源于直觉启于思维成于极限——以“圆柱、圆锥、圆台、球的表面积和体积”为例 [J]. 中学教研 (数学), 2022(08): 11-14.