

做题不能追求数量,而要讲究质量,要学会以点带面,多角度理解,只有这样才能跳出题海的怪圈.选择好题,选择成功!为此,我们特推荐以下习题,希望同学们能够融会贯通,学以致用,从多种角度分析思考、积极探索解题规律,摸索出获得最优解法的途径.

排列、组合、二项式定理、概率

第一轮复习测试题

■河南 任志兵

一、选择题

1. 已知碳元素有3种同位素 ^{12}C 、 ^{13}C 、 ^{14}C ,氧元素也有3种同位素 ^{16}O 、 ^{17}O 、 ^{18}O ,则不同的原子构成的 CO_2 分子有().

A. 81种 B. 54种 C. 27种 D. 9种

2. 从10名男生和5名女生中选出6人组成啦啦队,若按性别比例分层抽样,且指定某男生必须参加并担任队长,则不同的抽取方法数是().

A. $C_{10}^5 \cdot C_5^1$ B. $C_{10}^4 \cdot C_5^2$ C. $A_{10}^5 \cdot C_5^1$ D. $C_5^1 \cdot C_5^5$

3. 将红、黑、白这3个棋子放入如图1所示的 4×4 方格内,每格内只能放1个棋子,且3个棋子既不同行也不同列,则不同的放法有().

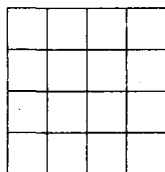


图1

A. 576种 B. 288种
C. 144种 D. 96种

4. 如果 $(3x^2 - \frac{2}{x^3})^n$ 的展开式中含有非零常数项,则正整数 n 的最小值为().

A. 3 B. 5 C. 6 D. 10

5. 若多项式 $x^2 + x^{10} = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2 + \dots + a_9(x+1)^9 + a_{10}(x+1)^{10}$,则 $a_9 =$ ().

A. 9 B. 10 C. -9 D. -10

6. 若 $(x^2 - \frac{i}{\sqrt{x}})^n$ 的展开式中第3项与第5项的系数之比为 $-\frac{3}{14}$,其中 $i^2 = -1$,则展开式中常数项是().

A. -45i B. 45i C. -45 D. 45

7. 设集合 $U = \{1, 2, 3, 4\}$,选择 U 的2个非空子集 A 和 B ,使 A 中最大的数小于 B 中最小的数,则不同的选择方法共有().

A. 16种 B. 17种 C. 18种 D. 19种

8. 若 $x \in A$,且 $\frac{1}{x} \in A$,就称 A 是伙伴关系集合,集合 $M = \{-1, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4\}$ 的所有非空子集中,具有伙伴关系集合的集合的个数为().

A. 15 B. 16 C. 2^8 D. 2^5

9. 已知 $(\sqrt{x} - 1)^{10} = a_0 + a_1\sqrt{x} + a_2(\sqrt{x})^2 + \dots + a_{10}(\sqrt{x})^{10}$,则 $|a_0| + |a_1| + |a_2| + \dots + |a_{10}|$ 的值是().

A. 0 B. 2^5 C. 2^{10} D. 4^{10}

10. 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数(如 $[2] = 2, [\frac{5}{4}] =$

1),对于给定的 $n \in \mathbb{N}^*$,定义 $C_n^x = \frac{n(n-1)\dots(n-[x]+1)}{x(x-1)\dots(x-[x]+1)}, x \in [1, +\infty)$,则当 $x \in [\frac{3}{2}, 3)$ 时,函数 C_n^x 的值域是().

A. $[\frac{16}{3}, 28]$ B. $[\frac{16}{3}, 56]$
C. $(4, \frac{28}{3}) \cup [28, 56]$ D. $(4, \frac{16}{3}] \cup (\frac{28}{3}, 28]$

11. 李四、王五、赵六这3位同学委托张三打听某高校自主招生招生的信息,这4人约定知道该信息者主动打电话告诉未知者.某天,当他们4人之间共通了3次电话时,就每人都获悉了同一条某高校自主招生的信息.那么,张三知道该信息后就打出电话的通话方案共有().

A. 16种 B. 17种 C. 34种 D. 48种

12. 将7个人(含甲、乙)分成3个组,有1组3人,有2组均为2人,不同的分组数为 a ,甲、乙同组的概率为 P ,则 a 、 P 的值分别为().

A. $a=105$ $P=\frac{5}{21}$ B. $a=105$ $P=\frac{4}{21}$
C. $a=210$ $P=\frac{5}{21}$ D. $a=210$ $P=\frac{4}{21}$

二、填空题

13. $(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})^8$ 的展开式中,含 x 的整数次幂的项的系数之和为____.(用数字作答)

14. 如果 $x + x^2 + x^3 + \dots + x^9 + x^{10} = a_0 + a_1(1+x) + a_2(1+x)^2 + \dots + a_9(1+x)^9 + a_{10}(1+x)^{10}$,则 $a_9 =$ _____.

15. 有写着0、1、5、6的4张卡片,如果允许6作9用,那么从中任抽3张,能组成____个三位数.

16. 把圆周分成4等份, A 是其中1个分点,动点 P 在4个分点上按逆时针方向前进,现在投掷一个质地均匀的正四面体,它的四个面上分别写有1、2、3、4这4个数字中的1个, P 点从 A 点出发,按照正四面体底面上的数字前进几个分点,转一周之前连续投掷,则 P 点转一周恰好能回到 A 点的概率为_____.

三、解答题

17. 应用组合的知识求证: $C_m^n \cdot C_n^0 + C_m^{n-1} \cdot C_n^1 + \dots + C_m^1 \cdot C_n^{n-1} + C_m^0 \cdot C_n^n = C_{m+n}^n$.

18. 5个男生和5个女生排成一排.



- (1)甲、乙站在一起,有多少种排法?
(2)男、女生分别站在一起,有多少种排法?
(3)男、女相间的排法有多少种?

19. 某批产品成箱包装,每箱5件,一用户在购进该批产品前先取出3箱,再从每箱中任意取出2件进行检验.设取出的第一、二、三箱中分别有0件、1件、2件二等品,其余为一等品.

- (1)求取出的6件产品中有1件是二等品的概率 P_1 .
(2)若抽检的6件产品中有2件或2件以上二等品,用户就拒绝购买这批产品,求这批产品被用户拒绝购买的概率 P_2 .

20. 已知有3个不同的球和4个不同的盒子,盒子的编号为1、2、3、4.现将球逐个独立地、随机地放入4个盒子中去.

- (1)试求盒子中球的最多个数分别为1、2、3的概率.
(2) ξ 表示其中有球的盒子的最小编号,求 $\xi=2$ 的概率.

21. 在一个盒子中,放有标号分别为1、2、3的3张卡片,现从这个盒子中,有放回地先后抽得2张卡片的标号分别为 x, y ,记 $\xi=|x-2|+|y-x|$.

- (1)求 ξ 的最大值,并求事件“ ξ 取得最大值”的概率.
(2)求 ξ 的分布列和数学期望.

22. 某校从参加高三年级

期中考试的学生中抽出60名学生,将其成绩(均为整数)分成六段,即 $[40, 50)$ 、 $[50, 60)$ 、 $\dots$ 、 $[90, 100]$ 后,画出部分频率分布直方图(如图2).观察图形的信息,回答下列问题.

- (1)求第四小组的频率,并补全这个频率分布直方图.

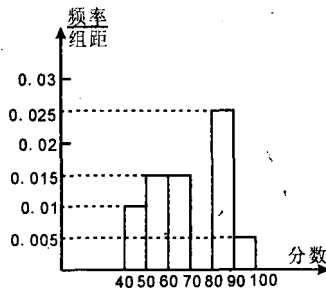


图2

- (2)估计这次考试的及格率(60分及以上为及格).
(3)从成绩是70分以上(包括70分)的学生中选2人,求他们在同一分数段的概率.

参考答案与提示

1. C 2. D 3. A 4. B 5. D 6. D 7. B 8. A 9. C
10. D 11. A 12. A

13. 72 14. -9 15. 32 16. $\frac{125}{256}$

17. 一方面,从 $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n$ 这 $m+n$ 个不同元素中取出 k 个元素的组合数为 C_{m+n}^k .另一方面,将 $m+n$ 个元素分为两个集合 $A=\{a_1, \dots, a_m\}$, $B=\{b_1, \dots, b_n\}$,那么从 $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n$ 这 $m+n$ 个元素中取出 k 个有如下 $k+1$ 类方法:第1类即从 A 中取 k 个,从 B 中取0个;第2类即从 A 中取 $k-1$ 个,从 B 中取1个; $\dots$;第 k 类即从 A 中取1个,从 B 中取 $k-1$ 个;第 $k+1$ 类即从 A 中取0个,从 B 中取 k 个,根据分类计数原理,组合数为 $C_m^k \cdot C_n^0 + C_m^{k-1} \cdot C_n^1 + \dots + C_m^1 \cdot C_n^{k-1} + C_m^0 \cdot C_n^k$.从以上两方面考虑从 $m+n$ 个不同元素中取出 k 个的组合数应该相等,故 $C_m^k \cdot C_n^0 + C_m^{k-1} \cdot C_n^1 + \dots + C_m^1 \cdot C_n^{k-1} + C_m^0 \cdot C_n^k = C_{m+n}^k$.

18. (1) $A_3^2 \cdot A_2^2 = 725\ 760$.
(2) $A_5^3 \cdot A_5^3 \cdot A_2^2 = 28\ 800$.

(3) $2A_5^3 \cdot A_5^2 = 28\ 800$.

19. 设 A_i 表示事件“第二箱中取出 i 件二等品”, $i=0,1$;
 B_j 表示事件“第三箱中取出 j 件二等品”, $j=0,1,2$.

$$(1) P_1 = P(A_1 \cdot B_0) + P(A_0 \cdot B_1) = P(A_1) \cdot P(B_0) + P(A_0) \cdot P(B_1) = \frac{C_4^1}{C_5^2} \cdot \frac{C_3^2}{C_5^2} + \frac{C_4^0}{C_5^2} \cdot \frac{C_3^1 \cdot C_2^1}{C_5^2} = \frac{12}{25}.$$

$$(2) P_2 = 1 - P(A_0 \cdot B_0) - P_1 = 1 - \frac{C_4^0}{C_5^2} \cdot \frac{C_3^2}{C_5^2} - \frac{12}{25} = \frac{17}{50}.$$

20. (1)记“盒子中球的最多个数是 i ”为事件 A_i ,则

$$P(A_1) = \frac{A_1^3}{4^3} = \frac{3}{8}, P(A_2) = \frac{C_3^2 \cdot A_2^1}{4^3} = \frac{9}{16}, P(A_3) = \frac{C_1^1}{4^3} = \frac{1}{16}.$$

(2)有球的盒子的最小编号为2,有如下4种情况:2、3、4号盒中有球;2、3号盒中有球;2、4号盒中有球;仅2号盒中有球.所求概率为 $P(\xi=2) = \frac{A_3^3 + C_3^2 \cdot A_2^1 + C_3^1 \cdot A_2^2 + A_2^3}{4^3} = \frac{19}{64}$.

21. (1) x, y 的可能取值均为1、2、3,则 $|x-2| \leq 1$,

$|y-x| \leq 2$,故 $\xi \leq 3$,且当 $\begin{cases} x=1, \\ y=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=3, \\ y=1 \end{cases}$ 时, ξ 取得最大值3.

由于有放回抽2张卡片的所有情况有 $C_3^1 \cdot C_3^1 = 9$ (种),

$$\text{则 } P(\xi=3) = \frac{2}{9}.$$

(2) ξ 的可能取值为0、1、2、3.

若 $\xi=0$,则 $\begin{cases} x=2, \\ y=2, \end{cases}$ 只有1种情况.

若 $\xi=1$,则 $\begin{cases} x=1, \\ y=1 \end{cases}$, $\begin{cases} x=2, \\ y=1 \end{cases}$, $\begin{cases} x=2, \\ y=3 \end{cases}$, $\begin{cases} x=3, \\ y=3 \end{cases}$,有4种情况.

若 $\xi=2$,则 $\begin{cases} x=1, \\ y=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=3, \\ y=2 \end{cases}$,有2种情况.

随机变量 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$

$$\text{因此, } E\xi = 0 \times \frac{1}{9} + 1 \times \frac{4}{9} + 2 \times \frac{2}{9} + 3 \times \frac{2}{9} = \frac{14}{9}.$$

22. (1)因为各组的频率和等于1,故第四组的频率为 $1 - (0.025 + 0.015 \times 2 + 0.01 + 0.005) \times 10 = 0.3$.补全后的频率分布直方图如图3所示.

(2)由图3可知,60及以下的分数所在的第三、四、五、六组的频率之和为

$(0.015 + 0.03 + 0.025 + 0.005) \times 10 = 0.75$,则抽样学生成绩的合格率是75%.

(3)成绩在分数段 $[70, 80)$ 、 $[80, 90)$ 、 $[90, 100]$ 的人数分别是18、15、3.从成绩是70分以上(包括70分)的学生中选2人,他们在同一分数段的概率为 $P = \frac{C_{18}^2 + C_{15}^2 + C_3^2}{C_{36}^2} = \frac{29}{70}$.

(责任编辑 袁伟刚)

