立体几何中外接球与内切球模型归纳

■安徽省芜湖市第一中学　周晓刚　江步云

近年来的高考和各级各类模拟考试中，立体几何的外接球和内切球问题，已成为常考常新试题，通常以选填题的形式出现，主要考查空间中的垂直与平行关系、空间距离、球的表面积和体积等知识。通过梳理高考真题和模拟题，不难发现该类问题可以归结为几类模型问题求解，在高考备考中，只要根据题目条件识别出问题所属模型，就可根据模型快速解题。下面笔者通过一些典型例题对立体几何中有关球的模型进行归纳，与读者交流，以期对同学们的高考备考能提供一些帮助。

一、外接球模型

模型一：正棱锥模型

由于正棱锥顶点的投影是底面的外心，由定心法可知正棱锥的外接球球心在底面的高上。若设正棱锥的高为 h，底面外接圆的半径为 r，外接球的半径为 R，由图1，图2，图3知，对任意正棱锥，有 $OA=R$，$O_1A=r$，$OO_1=h-R$（如图1，图3），或 $OO_1=R-h$（如图2）。根据勾股定理，可得到正棱锥外接球半径的通用公式为 $R^2=r^2+(h-R)^2$。

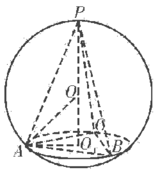

图1

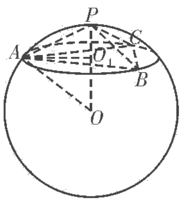

图2

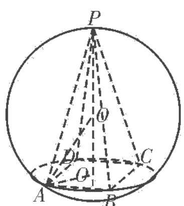

图3

例1　所有棱长均为2的正四棱锥的外接球半径为____。

解析：易知底面（边长为2的正方形）外接圆的半径 $r=\sqrt{2}$，正四棱锥的高 $h=\sqrt{2}$，根据公式 $R^2=r^2+(h-R)^2$，可得 $R=\sqrt{2}$。

模型二：线面垂直模型

众所周知，存在外接球的棱柱均为直棱柱，但直棱柱存在外接球的条件是底面存在外接圆。如图4，若设直棱柱的高为 h，即 $OO_1=\frac{h}{2}$，设底面外接圆的半径为 r，即 $O_1A=r$，设外接球的半径为 R，即 $OA=R$。由勾股定理知 $R^2=r^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2$，显然该公式对直棱柱的外接球具有一般适用性。而具有线面垂直特征的棱锥都可以补成一个直棱柱，而且该直棱柱和原棱锥具有相同的外接球。所以公式 $R^2=r^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2$ 适用于所有具有线面垂直特征的棱柱与棱锥，其中 R 是外接球的半径，h 是垂线段的长度，r 是垂面外接圆的半径。

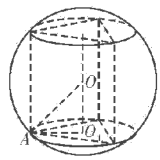

图4

例2　已知三棱锥 $S\text{-}ABC$ 中，$AC\perp$ 平面 SBC，$AC=4\sqrt{3}$，$BC=2\sqrt{3}$，$\angle BSC=60^\circ$，则该三棱锥的外接球的半径为____。

解析：在 $\triangle SBC$ 中，$2r=\frac{BC}{\sin\angle BSC}=\frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=4$，即 $r=2$，垂线段 AC 的长度为 $4\sqrt{3}$，代入公式 $R^2=r^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2=16$，得 $R=4$。

模型三：增补成长方体的模型

众所周知，长方体的体对角线即为其外接球的直径。将棱锥增补成长方体的操作不仅仅局限于解决外接球问题，在截面等其他问题中也有类似操作。在这里我们主要阐述两种具体模型：对棱相等的三棱锥（如图5）、有三个面是

系求轨迹；③可以利用空间坐标运算求轨迹。

立体几何中的动点轨迹问题，主要考查空间想象能力，分析变化中的不变量，考查的内容以教材中的公理和基本定理为主，若我们能熟练掌握这些基本公理、定理、概念、公式等，牢记文中归纳总结出的六大类型及其通性通法，定能轻松掌握立体几何中的动点轨迹问题。

（责任编辑　王福华）

直角三角形的三棱锥(如图6,图7,图8)。

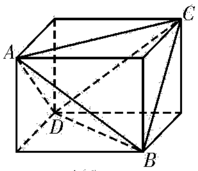

图5

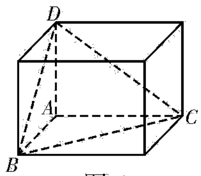

图6

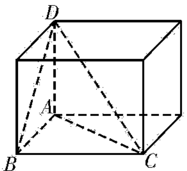

图7

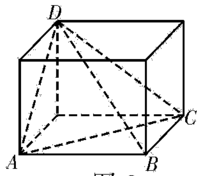

图8

例3 在三棱锥 $D\text{-}ABC$ 中,$\angle DAC=\angle BCA=\angle DBC=90^\circ$,$BD=BC=5$,且直线 AC 与 BD 所成角的余弦值为 $\frac{3}{5}$,则该三棱锥的外接球的表面积为____。

解析:观察到该三棱锥有三个直角但两两不共顶点,并没有线面垂直的特征,不符合模型二,所以只能增补成长方体(如图9)再作研究。直线 AC 与 BD 所成角即 $\angle DBE$,由 $\cos\angle DBE=\frac{3}{5}$ 知 $BE=3$,$DE=4$,则外接球的直径为 $\sqrt{BC^2+BE^2+DE^2}=5\sqrt{2}$,表面积为 $4\pi R^2=50\pi$。

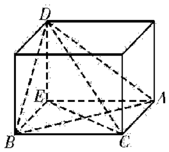

图9

模型四:一般模型

一般来说,除了上述三种特殊模型,其他均用一般方法——定心法解决。如图10,面 ABC 和面 $DEFG$ 均是任意多面体的两个面,而 O_1,O_2 是这两个面的外心。由球的性质知过外心 O_1,O_2 分别作这两个面的垂线,两条垂线均过球心,即两条垂线的交点为球心,此为定心法。

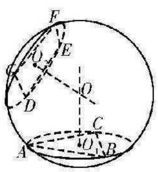

图10

例4 如图11,在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,$AB=2$,$BC=CC_1=1$,E,F 分别为 AB,CD 的中点,则三棱锥 $D_1\text{-}BEF$ 外接球的表面积为____。

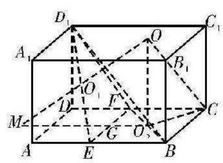

图11

解析:用定心法解决外接球问题,首先要找到两个外心位置特殊的面。在三棱锥 $D_1\text{-}BEF$ 中,面 D_1FE 和面 FEB 是直角三角形,两条斜边 D_1E,BF 的中点 O_1,O_2 即为两个直角三角形的外心。过 O_1,O_2 分别作面 D_1FE 和面 FEB 的垂线,交于球心 O,取 EF 的中点 G,则半径 $R=OC=\sqrt{O_2O^2+O_2C^2}$。在四边形 OO_1GO_2 中,$O_1G=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$O_2G=\frac{1}{2}$,$\angle OO_1G=\angle OO_2G=90^\circ$,$\angle O_1GO_2$ 为二面角 $D_1\text{-}EF\text{-}C$ 的平面角,易得其为 135°。延长 OO_1,O_2G 交于 M,可得 $MG=1$,$\angle M=45^\circ$,在 $\mathrm{Rt}\triangle MO_2O$ 中,$OO_2=MO_2=\frac{3}{2}$,则 $R=OC=\sqrt{O_2O^2+O_2C^2}=\frac{\sqrt{11}}{2}$,则表面积为 $4\pi R^2=11\pi$。

评注:本题是定心法最一般的情况,也是最繁杂的情况,这种情况下会构造出四边形,而这个四边形的已知角是两个直角和一个二面角的平面角,已知边是二面角的平面角的两边,需要解出两条垂线段中的一条再进一步求半径。

例5 已知四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是正方形,侧面 $PCD\perp$ 平面 $ABCD$,$\angle CPD=60^\circ$,$AB=PD=2$,则四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的外接球的体积为____。

解析:如图12,过正方形 $ABCD$ 的外心 O_1 和正三角形 PCD 的外心 O_2,分别作两个平面的垂线,交于球心 O,不难看出 $OO_1=MO_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$O_1A=\sqrt{2}$,根据勾股定理得外接球的半径 $R=OA=\frac{\sqrt{21}}{3}$,则体积为 $\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{28\sqrt{21}}{27}\pi$。

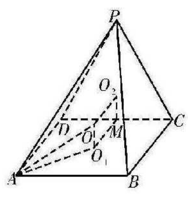

图12

评注:本题是将一般题型中的二面角特殊化为直二面角,难度大幅度下降。

例6 在三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中，$\triangle ABC$ 是边长为3的等边三角形，D 是线段 AB 的中点，$DE\cap PB=E$，且 $DE\perp AB$，若 $\angle CDE=120°$，$PA=\frac{3}{2}$，$PB=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，则三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的外接球的表面积为____。

解析：由 $PA=\frac{3}{2}$，$PB=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，$AB=3$ 知 $\triangle PAB$ 为直角三角形。如图13，过正 $\triangle ABC$ 的外心 O_1 和 $Rt\triangle PAB$ 的外心 D 分别作两个面的垂线，交于球心 O。由题意可知 $\angle EDC$ 为二面角 $P\text{-}AB\text{-}C$ 的平面角，$\angle EDC=120°$，$\angle EDO=90°$，则 $\angle ODO_1=30°$。又在 $Rt\triangle ODO_1$ 中，$DO_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$，可得 $OO_1=\frac{1}{2}$。又 $O_1C=\sqrt{3}$，则外接球的半径 $R=\sqrt{OO_1^2+O_1C^2}=\frac{\sqrt{13}}{2}$，即表面积为 13π。

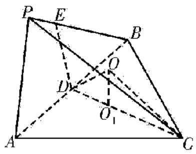

图13

评注：本题其中一个面的外心刚好在二个面的交线上，如同例4中的四边形退化成直角三角形。

二、切球模型

模型一：多面体的内切球

如图14，球 O 为四面体 $A\text{-}BCD$ 的内切球，由球的性质知四面体 $O\text{-}ABC$，$O\text{-}ABD$，$O\text{-}ACD$，$O\text{-}BCD$ 的高均为内切球的半径 r，则 $V_{A\text{-}BCD}=V_{O\text{-}ABC}+V_{O\text{-}ABD}+V_{O\text{-}ACD}+V_{O\text{-}BCD}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot r+\frac{1}{3}S_{\triangle ABD}\cdot r+\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ACD}\cdot r+\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot r$。不妨设四面体 $A\text{-}BCD$ 的体积为 V，表面积为 S，则 $r=\frac{3V}{S}$。很显然此结论具有一般性，对所有具有内切球的多面体均适用。但应用此结论有两个前提：第一是必须为多面体，第二是必须为内切球。而第二点同学们容易将“几何体能打磨成（装下）最大的球”误以为一定是内切球，这一论断的前提是该几何体必须具有内切球。

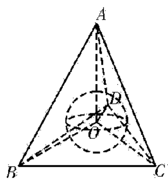

图14

例7 （1）边长为2的正四面体的内切球的半径为____。

（2）已知某容器为三棱柱，高为3，底面是腰为 $\sqrt{2}$ 的等腰直角三角形，则该容器能装下的最大球的体积为____。

解析：（1）边长为2的正四面体的体积和表面积分别为 $V=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$S=4\sqrt{3}$，则内切球的半径 $r=\frac{3V}{S}=\frac{\sqrt{6}}{6}$。

（2）若想将球放入棱柱中，球必须满足两个条件：$r\leqslant$ 底面内切圆的半径 $=\sqrt{2}-1$；$r\leqslant$ 三棱柱高的一半 $=\frac{3}{2}$，所以 $r\leqslant\sqrt{2}-1$，故能装下的最大球的半径为 $\sqrt{2}-1$。

模型二：其他切球

内切问题内容丰富，除多面体的内切球外，还有旋转体的内切球、棱切球，以及多个球与几何体内切等。解决这类问题的思路基本一致，即探寻球心和切点。

例8 三个半径为3的球两两相切放置在水平桌面上，则三个球与桌面围成的空间中能放置的最大球的半径为____。

解析：显然所求球与三个球和桌面均相切。设三个球的球心分别为 O_1，O_2，O_3，与桌面的三个切点分别为 A，B，C，则三棱柱是一个底面边长为6，高为3的正棱柱。如图15，设所求球的球心为 O，半径为 r，与桌面的切点为 D，则三棱锥 $O\text{-}O_1O_2O_3$ 为正三棱锥，底面边长为6，侧棱长为 $r+3$。根据题意可求三棱锥 $O\text{-}O_1O_2O_3$ 的高为 $\sqrt{r^2+6r-3}$，而根据相切知 $OD=r$，三棱锥 $O\text{-}O_1O_2O_3$ 的高又为 $3-r$，则 $\sqrt{r^2+6r-3}=3-r$，解得 $r=1$。

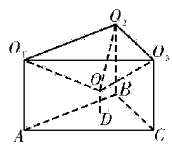

图15

评注：解决本题的关键在于确定四个球心和四个切点的位置。

关于外接球和内切球问题，解题的关键在于记住几个特征明显的模型，方便快速甄别，其他的模型均用一般方法解决。

（责任编辑 王福华）