正余弦定理复习课教学新视角*

●汪　生　(南京市第十四中学,江苏 南京　210031)　●余建国　(大厂高级中学,江苏 南京　210044)

摘　要: 文章以一节关于正余弦定理的复习课为切入口,记录了复习课教学的新视角——从本源的视角、命题的视角、全局的角度审视数学问题,从本源的发现中寻找数学方法,从试题的命制过程中获得数学能力,站在全局的高度领悟数学本质、提升数学核心素养.

关键词: 本源教学; 命题式教学; 全局性教学; 正余弦定理

中图分类号: O124.1　文献标识码: A　文章编号: 1003-6407(2020)05-0004-04

复习课教学,常见有以下两种模式: 一是以知识点为主线,以点带题; 二是以例题为主要出发点,通过例题的形式串联知识点以寻找其内在联系.无论哪一种模式,多数教师都比较难以达到新颖和创新的角度.笔者最近参加一次名师交流活动,有幸听到了江苏省南京市大厂高级中学的陈萍萍老师的一节关于正余弦定理的复习课,其上课的角度值得同仁学习.笔者对本节课进行了整理和反思,感触颇深,以飨读者.

1　回归本源,崭露头角

正余弦定理是三角函数的延伸,是对平面向量的深化,是解决三角形问题的有效手段.教师首先高度概括了正余弦定理在数学中的地位,同时以问题串的形式引发学生对正余弦定理进行回顾和思考.

问题 1　正余弦定理的内容是什么?

问题 2　平面向量是研究平面图形几何性质与数量关系的重要工具,三角形作为一种几何图形,如何从平面向量的角度证明正余弦定理?

设计意图　让学生感知三角形中存在的向量关系以及平面向量数量化的方法.

问题 3　正余弦定理能解决三角形中的哪些问题(知三求一及其他)?

问题 4　请解决以下 3 个小问题:

1) 在$\triangle ABC$中,$\cos\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,$BC=1$,$AC=5$,则$AB=$______.

2) $\triangle ABC$的三边分别为a,b,c,若$a=\sqrt{7}$,$b=2$,$A=60°$,则$\sin B=$______,$c=$______.

3) 在$\triangle ABC$中,$a=4$,$b=5$,$c=6$,则$\frac{\sin 2A}{\sin C}=$______.

设计意图　利用正余弦定理处理解三角形的 3 类常见问题,如已知两边一角、两角一边(略)、三边等.

教师的设计全面地呈现了解三角形的 3 类常见问题(如图 1 所示,因为知道 3 个角时所得三角形相似,可以无限扩大或缩小,所以三角形不确定).

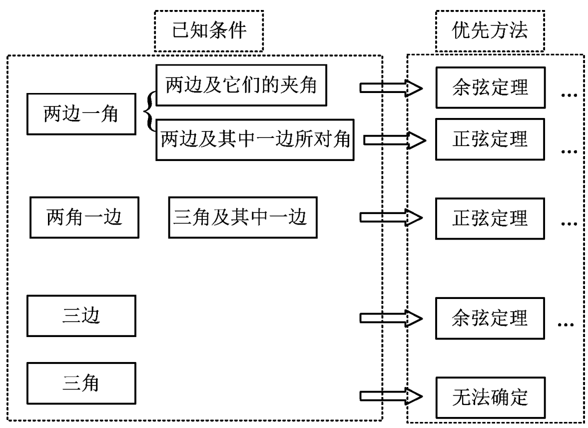

图 1

2　从命题角度审视正余弦定理

例 1　$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c,已知$2\cos C(a\cos B+b\cos A)=c$.

* 收文日期: 2019-09-20; 修订日期: 2019-10-25
基金项目: 江苏省教育科学十三五规划立项课题(D/2016/02/69); 江苏省南京市江北新区课题(QGHKT20180024)
作者简介: 汪　生(1982—),男,江苏南京人,中学一级教师.研究方向: 数学教育.

1) 求 C;

2) 若 $a+b=5$,$\triangle ABC$ 的面积为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$,求 c.

(2016 年全国数学高考卷Ⅰ理科试题第 17 题改编)

教师的选题合理,已知条件不仅考查了正弦定理,更与课本上的练习(射影定理 $c=a\cos B+b\cos A$)关联到了一起(同时复习了射影定理的内容),达到一题双关的目的.更让人感觉新颖的是第 2) 小题的设置,使得教师有较大的发挥空间,并能将一系列的解三角形问题全部包含其中.

第 2) 小题的设置从形式上来看,利用第 1) 小题的结论 $C=\frac{\pi}{3}$,$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,得到 $ab=6$,然后利用余弦定理即可.教师还作了以下深入探究:

师:回顾条件"1) $C=\frac{\pi}{3}$;2) $a+b=5$;3) $ab=6$(等价条件 $S_{\triangle ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$)".利用条件 2) 和条件 3) 可得$\angle C$ 的相邻两边分别为 2 和 3,即知"三"(两边及夹角).

师:知"三"能求出三角形的其他变量吗?

生 1:能! 利用余弦定理即能求出边 c,然后利用正弦或余弦定理即可求得其他角.

师:知"三"即三角形确定! 那么减少条件,若知"二",三角形能确定吗?

生 2:在 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ 中,若知二,则方程为不定方程,因此三角形不确定.

师:如果是你,你会怎么设问呢?

生 3:求范围.

师:很好! 可以求边长的范围(最值)、周长的范围(最值)以及面积的范围(最值)等等.

师:回过来再看这 3 个条件,可以减少什么条件,求什么最值?

生 4:减少条件 2),保留条件 1) 和条件 3),求周长的最小值.

生 5:减少条件 3),保留条件 1) 和条件 2),求周长的最小值.

生 6:减少条件 1),保留条件 2) 和条件 3),求周长的最小值.

师:请同学们分成 3 个小组分别解决.

生 7(第一组代表):周长

$$l=a+b+\sqrt{a^2+b^2-ab}=a+b+\sqrt{(a+b)^2-18}.$$

设 $t=a+b$,则

$$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}=2\sqrt{6},$$

即

$$t\geqslant 2\sqrt{6},$$

从而 $l(t)=t+\sqrt{t^2-18}$ 在 $t\in[2\sqrt{6},+\infty)$ 上单调递增,于是 $l_{\min}=3\sqrt{6}$.

生 8(第二组代表):

$$c^2=a^2+b^2-ab=(a+b)^2-3ab\geqslant (a+b)^2-3\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(a+b)^2}{4},$$

当且仅当 $a=b=\frac{5}{2}$时取到等号,即 $c\geqslant\frac{5}{2}$,故 c 的最小值为$\frac{5}{2}$,周长的最小值为$\frac{15}{2}$.

生 9(第三组代表):因为 $a+b=5$,$ab=6$,即三角形两边分别为 2 和 3,所以利用"两边之和大于第三边以及两边之差小于第三边",可知 $c\in(1,5)$,周长无最值.

师:能求面积的最大值吗?

生 10:若减少条件 2),保留条件 1) 和条件 3),则三角形面积为定值;若减少条件 3),保留条件 1) 和条件 2),则三角形的面积有最大值(即 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}ab\leqslant\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{25\sqrt{3}}{16}$);若减少条件 1),保留条件 2) 和条件 3),则三角形的面积无最值.

师:由以上知"三"的条件得,若仅知"两边",则只能利用三角形形成的条件,三角形面积和周长均无最值,即将"知三"改成"知二"且必需要有角的存在,否则意义不大.那么,同学们能保留条件 1) 对例 1 进行改编吗?

生 11:知一边及其对角(即变式 1).

变式 1　已知 $C=\frac{\pi}{3}$,$c=\sqrt{7}$,求三角形面积的最大值及周长的最小值.

生 12:由余弦定理知 $7=c^2=a^2+b^2-ab\geqslant 2ab-ab=ab$(当且仅当 $a=b=\sqrt{7}$时,等号成立),故

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}ab\leqslant\frac{7\sqrt{3}}{4}.$$

生 13:设三角形中边 a 所对的角为 θ,则另外

一个角为$\frac{2\pi}{3}-\theta$,利用正弦定理得

$$\frac{a}{\sin\theta}=\frac{b}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)}=\frac{\sqrt{7}}{\sin\frac{\pi}{3}},$$

则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{7\sqrt{3}}{4}\sin\theta\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)=\cdots$

3 高屋建瓴,由此及彼

师:前面研究"知二"时,老师一般都给予了条件"角为定值,对边大小确定或相邻两边关系确定(通常以和或积的形式呈现)".若"知一边及另外两边的关系",三角形周长和面积是否有最值?

例2 在$\triangle ABC$中,$AB=2$,$AC=2\sqrt{2}BC$,求$\triangle ABC$面积的最大值.

(2008年江苏省数学高考试题第13题)

(教师给出例2后,留给学生足够的时间思考.)

生14:令$AC=b$,$BC=a$,$AB=c=2$,则$b=\sqrt{2}a$,从而

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{3a^2-4}{2\sqrt{2}a^2},$$

$$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{\frac{-4a^4+24a^2-16}{8a^4}},$$

于是
$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}a^2\cdot\sqrt{\frac{-a^4+24a^2-16}{8a^4}}=\frac{1}{4}\sqrt{128-(a^2-12)^2},$$

当$a^2=12$时,$S_{\triangle ABC}$取到最大值$2\sqrt{2}$.

师:有没有更简捷的方法?

生15:不妨设$A(-1,0)$,$B(1,0)$,根据$AC=\sqrt{2}BC$即可求出点C的轨迹$(x-3)^2+y^2=8$,当点C纵坐标的绝对值最大时其面积最大,易知$S_{\triangle ABC}$的最大值为$2\sqrt{2}$.

师:怎么想到的?

生15:阿氏圆的定义,即一动点到两定点距离之比为定值(不等于1)的点的轨迹.

师:求面积时需要用到$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C$,既然给出的条件没有角,那么必须利用余弦定理及同角三角函数关系转化得到,计算量较大.当一边确定时,通过建立合理的直角坐标系,利用解析几何寻找动点轨迹,"将数转化为形"是一种比较方便的途径,也就是我们常见的数形结合,由数转形,由形化数.

师:三角形一边确定,另外两边之比为定值,则三角形面积有最大值.若改成"另外两边之和、之积、之差"呢,同学们可以在课后进行探究;另外对于变式1,同学们也可以用建系的方法,"由数转形"尝试解决.

4 对本节课的思考

4.1 命题视角的课堂教学有利于师生共同成长

高中数学教学应以发展学生学科核心素养为导向,创设合适的教学情境,启发学生思考,引导学生把握数学内容的本质.本节课教师主要以两个例题为线索,通过对例1的开发,启发学生对条件进行删减、改编等手段对原题进行加工,让课堂变成了学生思维的主阵地,丰富了课堂的维度,为学生的思维发展提供无限的空间.学生通过思维的碰撞、理性的分析、合理的推理,在实践中构建严谨的数学知识体系,追寻数学问题的本源,从具体问题中抽象出一般规律和结构.

从命题视角组织课堂教学,需任课教师具备较强的基本功及应变能力.本节课教师虽也分析了利用正余弦定理解决的几类问题,但并没有作为重点讲解的内容,而是从新的角度,将问题中的条件进行适当删减,让学生思考三角形是否确定,当不确定时能解决三角形的什么问题以及如何求周长和面积最值.例1的变式巧妙地回避了相邻两边之差为定值以及两边之商为定值这两种情形,"仅"研究了"和或积"的问题,通过课后沟通,在这节课讲授之前教师已经研究了所有可能,只不过这两类研究意义不明显.例2的改编过程虽然没有完整的探究,但给予了学生解决方法,虽然课堂没有足够的时间供学生研究另外两边之和、之差、之积等情形,但教师没有直接地告知结论,而是通过思考题的形式留给学生一些悬念,使得本节课的知识还能在课外获得更多的拓展和延伸,反映了教师具有极强的驾驭课堂的能力.

《普通高中数学课程标准(2017年版)》(以下简称《新课标》)告诉我们:通过高中数学课程的学习,让学生能获得进一步学习以及未来发展所必须的"四基、四能".本节课所执行的探究试题的命制

过程就是有效的基本活动经验之一.教师引领学生探究试题的命制过程,从增减条件出发,先改编条件,然后进行知识迁移等过程,让学生直观地感受到了试题命制过程,在这个命制过程中学习到了数学思想方法,提升了数学能力和素养.因此,构建这种常态化的数学活动是所有数学研究者所追逐的方向和目标.

4.2　"知识生成过程"是回归数学本源的有效途径

"问渠哪得清如许,唯有源头活水来".只有回归数学的源头,才能认清数学的本质,理解数学内涵,获得数学思想,提升数学素养.《新课标》指出,需要借助向量的运算探索三角形边长与角度的关系.也就是说,正余弦定理从某种程度上来说"源"于平面向量在三角形中的应用.在没有附加条件下,三角形中所存在的平面向量关系仅有"$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{CA}$",如何将平面向量关系式转化成与边角有关的恒等式,需师生共同探讨,在探究的过程中进行数学抽象,掌握转化的方法,从而提升学生的数学抽象、逻辑推理、数学建模等核心素养能力.

平面向量的数量化(向量关系转化成数量关系)通常有两种途径:一是平方法(等式左右两边同时平方,得到边角关系);二是等式两边同时乘以某新的向量(向量的数量积),得到边角关系.如对$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{CA}$的两边平方即可得余弦定理,若$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{CA}$的两边同乘以$\overrightarrow{BC}$则能得到射影定理,即$c=a\cos B+b\cos A$;若对$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{CA}$的两边乘以$\overrightarrow{BC}$的垂直向量$\overrightarrow{AD}$,则可得

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AD},$$

从而　$|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|\sin B=|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AD}|\sin C$,

即证得正弦定理.如以下例 3 两种方法均可行.

例 3　在$\triangle ABC$中,点O为三角形的外接圆圆心,$a=\sqrt{3}$,且$c+2\sqrt{3}c\cdot\cos C=2b$,$\overrightarrow{AO}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$,求$m+n$的最大值.

只有教师对平面向量数量化方法有透彻的分析,才能让学生在遇到新问题时能从容面对,从本质上分析其思路和方法.回归本源的知识过程通常蕴藏在课本一些定理、命题、例题的证明中以及课后某些习题的拓展中,因此,教师要充分地利用教材,从知识生成过程中回归数学本源,从回归本源的过程中提升数学素养.

4.3　以全局的眼光组织课堂教学可"一览众山小"

登得高才能望得远,这个道理无人不晓.在高三复习课的教学中,教师更要以高瞻远瞩的眼光看待每一个数学问题.数学世界是统一的整体,每部分都是相互关联和相通的,因此,需要用全局的眼光组织课堂教学,用一致的数学语言分析数学问题.

比如,苏教版《数学(必修 1)》中学习了函数的单调性,同时在选修部分又从导数角度分析了函数的单调性,因此,在复习函数单调性时,就需要从全局的眼光,从定义的角度或从导数的角度分析.再比如对于垂直条件的转化,可以从解析几何的角度转化成两条直线的斜率关系(若斜率存在,则斜率乘积等于-1),可从初中阶段两直线垂直的判定,或从向量的角度(其两个向量的数量积为 0),或从圆的角度"直径所对的圆周角为直角"等多个角度看待垂直问题.因此,从"直角"这一具体的问题抽象出不同的数学模型,正是我们数学学习的目的所在.史宁中先生曾说过"数学抽象就是从许多事物中舍弃个别的、非本质属性得到共同的、本质属性的思维过程,是形成概念的必要手段,而这种数学抽象的过程就需要以全局的眼光,从知识前后的一致性上发现数学知识的内在联系,用数学的思维思考世界."

"数缺形时少直观,形少数时难入微",数和形是研究高中数学最重要的两个手段,通常需要将数转形,或形化数.数转形即借助直角坐标系构建解析几何,形转数即借助代数运算化简转化成熟悉的问题.因此,在复习课教学中不能孤立地去看待某一个数学问题,而是需要用全局的眼光,从代数、几何、向量等多种视角审视,才能做到一览众山小!

如本节课例 2 的设置,从表面上看是解三角形,教师也非常"乐意"把这一类题放在解三角形部分,其本质只不过是阿氏圆的代数法考查而已.因此,教师要把学生从固定的思维中解放出来,脱去外在的伪装,认清真实的面目.再比如例 1 的变式,当角和所对边确定时,可以视两点固定,对角相等的点的轨迹为两段圆弧[1],当点恰好运动至圆心的正上方或正下方时,面积取得最大值.

参　考　文　献

[1]　汪生.追寻数学本源　多元表征内涵:从一节隐形圆的微专题谈起[J].中小学数学:高中版,2018(6):40-42.