

在数学教学中从点线面三维角度创新理解向量

胡 乙

(江苏经贸职业技术学院, 南京 211168)

摘 要: 为帮助学生深入理解向量蕴含的数学思想, 教师可从几何空间出发, 分三个部分讲授向量概念。从数轴出发, 讲授数轴发展史, 引导学生从多维空间中的数对(坐标)视角理解向量。从平行线出发, 引导学生学习平行向量和全等向量。从封闭回路出发, 引导学生运用封闭回路寻找向量的起点与终点。从几何点线面三维角度理解向量概念, 有助于学生后续学习向量相关定理、公式与法则。

关键词: 向量概念; 几何空间; 数轴; 平行线; 封闭回路

中图分类号: O183.1

文献标识码: A

文章编号: 1671-6558(2021)02-95-04

DOI: 10.3969/j.issn.1671-6558.2021.02.020

Innovative Understanding of Vector in Mathematics Teaching from Three – Dimensional Perspective of Point, Line and Plane

HU Yi

(Jiangsu Vocational Institute of Commerce, Nanjing 211168, China)

Abstract: In order to help students deeply understand the mathematical ideas contained in vector, teachers can teach the concept of vector in three parts from the perspective of geometric space. Starting from the number axis, teach the development history of the number axis, and guide students to understand vectors from the perspective of number pairs (coordinates) in multi – dimensional space. Starting from parallel lines, guide students to learn parallel vectors and congruent vectors. Starting from the closed loop, guide students to use the closed loop to find the starting point and end point of vector. Understanding the concept of vector from the three – dimensional perspective of geometric points, lines and surfaces is helpful for students to learn the related theorems, formulas and rules of vector.

Key words: vector concept; geometric space; number axis; parallel line; closed loop

0 引言

在数学中, 向量指既有大小又有方向且遵循平行四边形法则的量^[1]。目前, 国内对向量概念的教学研究主要体现在物理学科, 而从数学几何出发讲

授向量概念, 其研究尚处于起步阶段。吕松涛^[2]指出, 如果教师任意由物理模型推导向量概念, 学生则难以理解向量的数学内涵, 为此主张讲授向量的几何内涵。吴莉娜等^[3]认为教师可以借鉴数形结合

收稿日期: 2020-12-21

基金项目: 2020年江苏经贸职业技术学院科研项目(JSM20018)。

作者简介: 胡乙(1982—), 男, 江苏南京人, 讲师, 法学硕士, 研究方向为教育学原理、数学教育。

思想从数轴坐标来考察向量。范世祥^[4]提出通过类比数量、集合等数学对象研究思路来获取研究向量概念的新思路。熊翼^[5]提出用几何图形中两直线平行类比得到共线向量。国外学者倾向于从几何开始研究向量,即从数轴上的点、欧几里得二维空间数对、欧几里得三维空间数对开始理解向量。卡尔·P·西蒙等^{[6]170}认为应从空间中的坐标、点与位移等出发认识向量。此观点虽然涉及向量的数学本质,但不全面。完整的向量概念应包括点、线、面三方面,这是初等几何中最基本的概念。据此,在数学教学中,教师应从几何点、线、面出发,将向量概念分解为数轴、平行线、封闭回路三个项目进行讲授,引导学生从数学几何出发创新理解向量概念。与物理学相关概念相比,学生对点、线、面更加熟悉,更能体会到向量的数学本质。

1 从数轴理解向量概念

数轴的发展史也是向量的发展史,数轴与向量密切相关,从数轴理解向量一般较为容易。教师可运用数轴引导学生理解向量概念。

1.1 数轴的发展简史

从几何考察,最简单的几何体就是点与线,因为一条直线由无数点组成,将抽象的数与直线相结合,就能通过直线上点的变化来反映数的变化。在早期生活中,人们根据在数轴上标明的不同数字来比较不同物体的大小、长短、高低。数轴上以原点为中心,分为正数与负数两个方向,从原点开始到特定的实数,两点之间既有方向,又有距离。数轴也称为欧几里得一维空间,所谓一维,即点代表实数,所有的点都在一条直线上。

由于商业、航海等社会发展需要,数学计算开始由静止转向运动。为研究运动变化,人们发明了函数,其中一个量变化将导致其他量发生相应变化。描述这种运动关系最简单的函数是二元函数,其将输入量与输出量组合在一起,形成数对(坐标),写成 (X, Y) 。笛卡尔独创性地设计了两条互相垂直的数轴来表示数对(坐标),即: X 轴、 Y 轴。由于 X 轴、 Y 轴构成一平面,故学界称以上数轴为笛卡尔平面、笛卡尔坐标轴、欧几里得二维空间。在笛卡尔平面中,两轴相交点为原点。在坐标轴上,任意点 A 可表示为特定数对(坐标) $A(a, b)$,可通过 $A(a, b)$ 作垂线确定点 A ,反之亦然。

随着几何研究从平面发展到立体阶段,为描述立体空间,类似笛卡尔平面,可用三条互相垂直的数轴来构造欧几里得三维空间,即: X 轴、 Y 轴、 Z 轴。

目前在纸上最多能标明三维空间的点,对于更高维度空间,可用 R^n 来描述。在数轴上,人们用 R^1 表示一维空间;在坐标轴上,用 R^2 表示二维空间;在空间中,用 R^3 表示三维空间。据此,欧几里得 R^n 表示欧几里得 n 维空间, R^n 描述了 n 维空间中的有序数组 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 。

1.2 数轴与向量

从数轴考察,向量就是数对间位移的路径^{[6]173}。数对 $(1, 2)$ 表示从原点出发,沿 X 轴移动1单位,再沿 Y 轴移动2单位,从空间数对(坐标)运动轨迹观察,向量就是数对间位移的路径。在数学中,向量包含两个点,可用 $\overrightarrow{AB}$ 表示。由于多数教师未能强调向量必须是两个点,故学生容易对向量产生误解,认为向量只是一个点或一个坐标。据此,应该用空间的两点来表示向量。在 n 维空间中,如果点 A 为 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$,点 B 为 $(b_1, b_2, \dots, b_n)$,则向量 $\overrightarrow{AB}$ 的正确写法为 $\overrightarrow{AB} = [(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n)]$ 。从多维(n 维)空间考察向量, n 维空间包含 n 维有序数组,假设两个有序数组构成两个数对(坐标),则向量是从某一数对(坐标)运动到另一数对(坐标)的有向线段。

2 从平行线理解向量概念

教师可运用初等几何中的平行线、共线线段、成比例线段等知识,引导学生理解平行向量、全等向量等概念。

2.1 平行线与平行向量

在同一平面中,不相交的两条直线为平行线。在几何空间中,向量可用有向线段表示,方向相同或者相反的一组向量为平行向量。从向量数对(坐标)入手,教师可构造一组平行向量,引导学生理解该组平行向量的方向、斜率、长度等特点。假设 $\overrightarrow{OA} = [(0, 0), (1, 0)]$, $\overrightarrow{EF} = [(1, 1), (2, 1)]$,则该组向量所在直线互相平行。类比平行线段,如果一组向量方向相同或者相反,且在空间不相交,则其为一组平行向量,用公式描述为:

$$\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{CD} \quad (1)$$

在式(1)中, λ 为实数。如果一组平行向量从起点至终点方向一致,且长度相等,则式(1)中 λ 为1。如果该组平行向量方向相反,则 λ 为-1。特殊情况下,如果一组向量在一条直线上,则其为一组共线向量。共线向量是特殊的平行向量,也可用式(1)描述。

此时,教师可运用平行向量引导学生理解向量

是有方向的线段的含义。如果将非零向量 $\overrightarrow{AB}$ (起点与终点不重合的向量) 视为有向线段, 则一定可构造另一向量 $\overrightarrow{CD}$ 与之平行, 可以用 $\overrightarrow{CD}$ 表示 $\overrightarrow{AB}$, 用公式描述为:

$$\lambda \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \quad (2)$$

在式(2)中, λ 为实数且 $\overrightarrow{CD}$ 为非零向量。当学生理解如何用公式表示平行向量后, 教师请学生描述如何移动 $\overrightarrow{EF}$, 使之与 $\overrightarrow{OA}$ 重合, 以便学习全等向量。

2.2 平行向量与全等向量

教师可运用全等三角形、全等线段知识引导学生学习全等向量。如果两条线段重合, 则其为一组全等线段。如果两个三角形能重合, 则其为一组全等三角形。以此类推, 如果向量 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{CD}$ 能重合, 则其为一组全等向量。教师应说明一组全等向量方向、长度完全一致, 其也是一组特殊的平行向量。根据平行向量知识, 要证明两条线段平行、共线, 或者其长度比为一固定数值, 可设以上线段为 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{CD}$, 证明其为一组平行向量。学生通过学习平行向量、共线向量、全等向量等概念, 可深入理解向量概念中方向、长度等含义。

当学生能用公式描述一组全等向量后, 教师可引导学生变换数对(坐标)来平行移动向量。 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{CD}$ 为一组全等向量, 可平行移动 $\overrightarrow{AB}$ 使之与 $\overrightarrow{CD}$ 重合, 反之亦然。据此, 可平行移动任意非零向量至指定起点数对(坐标)。为方便计算, 可将空间中向量起点平行移动至原点, 假设空间一组全等向量 $\overrightarrow{OA} = [(0, 0), (1, 0)]$, $\overrightarrow{EF} = [(1, 1), (2, 1)]$, 则可运用分轴数量变换法平行移动 $\overrightarrow{EF}$, 使其起点坐标(数对)变为原点并与 $\overrightarrow{OA}$ 重合。

学生应首先学习分轴数量变换法原理。针对 $\overrightarrow{EF} = [(1, 1), (2, 1)]$, 通过代数运算使数对(坐标) $(1, 1)$ 在 X 轴、 Y 轴的数值均变为 0, 并保持 $\overrightarrow{EF}$ 方向不变, 相关公式为:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EF} &= [(1, 1), (2, 1)] \\ &= [(1-1, 1-1), (2-1, 1-1)] \\ &= [(0, 0), (1, 0)] = \overrightarrow{OA} \end{aligned} \quad (3)$$

从数对(坐标)运动轨迹观察以上过程, 首先将 $\overrightarrow{EF}$ 平行移动置于 $\overrightarrow{OA}$ 同起点上方, 再下移与 $\overrightarrow{OA}$ 重合。如果要平行移动某向量 $\overrightarrow{AB}$, 使其起点数对(坐标)变换为原点, 可将起点数对(坐标)数值均变换为 0, 并保持 $\overrightarrow{AB}$ 方向不变, 形成以原点为起点的新向量 $\overrightarrow{CD}$, 且 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 为一组全等向量。

2.3 多维空间中的平行向量

在欧几里得二维空间中, 如果学生能将向量平

行移动至指定起点数对(坐标), 则教师可引导其在多维(n 维)空间中完成同样任务。在 n 维空间中, 教师设向量 $\overrightarrow{AB} = [(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n)]$, 如果学生将其起点数对(坐标)平行移动至原点, 则新向量 $\overrightarrow{OB} = [(0, 0, \dots, 0), (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_n - a_n)]$ 。目前多数数学教材中仅用一个数对(坐标)定义向量, 如 $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_n - a_n)$, 此写法省略了向量起点, 仅保留了向量终点。因教材未详细说明以上过程, 故多数学生一直认为向量就是一个点, 难以理解平行向量、全等向量等相关概念。

学生可运用平行向量知识快速证明以下命题:

“设 $\alpha = (x_1, y_1)$, $\beta = (x_2, y_2)$, 则 $\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$ 。”^[7] 学生可先证明该命题的充分条件。原命题中, 可将 α 、 β 视为一组平行向量, 因该组向量均以原点为起点数对(坐标), 由此可推理得到 α 、 β 其实为一组共线向量, 进而推理得到 α 、 β 的所有起点与终点数对(坐标)构成相似三角形。按相似三角形对应边成比例法则, 可写出 $x_1 : x_2 = y_1 : y_2$, 整理得出 $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$ 。可见, 通过平行线深入理解向量后, 学生可提高解题效率。

3 从封闭回路理解向量概念

向量概念中起点、终点、长度均说明向量是封闭的。虽然封闭回路是向量概念中极具特色的内容, 但是多数教材未能详细说明封闭回路的含义, 也未能详细解释其与向量路径、向量长度的关系, 这使多数学生难以理解向量代数运算法则、向量长度计算公式等知识。教师可运用平面三角形引导学生理解封闭回路的含义。

3.1 封闭回路的含义

郑宇邻^[8]指出, 在平面封闭图形中, 首尾相接的向量形成封闭回路。向量从起点出发, 无论其如何运动, 只要向量最终回到起点, 向量就为 0。如果向量从起点出发, 沿直线返回至起点, 则向量为 0。教师可将以上内容概括为向量的封闭回路, 这是向量概念中最独特的地方。

为深入理解封闭回路, 教师可运用平面三角形进行说明。以 $\triangle ABC$ 为例, 向量从 A 点出发, 沿 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{BC}$ 、 $\overrightarrow{CA}$ 运动回 A 点, 则该向量为 0, 用公式描述为:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0 \quad (4)$$

此时, $\triangle ABC$ 形成封闭回路, $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 组成折线。如果 $\triangle ABC$ 为圆弧, 则向量依然为 0。

当学生理解式(4)后, 假设 $\triangle ABC$ 中, 向量从 A

点出发,沿 $\overrightarrow{AB}$ 运动至 $\overrightarrow{BC}$,则向量终点为 C 点,用公式描述为:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \quad (5)$$

只要找到向量的起点与终点,就可以构造向量。式(5)中向量的起点为 A ,终点为 C ,故新向量为 $\overrightarrow{AC}$ 。此时,教师可引导学生学习向量长度概念。向量长度是指连接向量起点与终点线段的长度,可用符号表示为 $|\overrightarrow{AB}|$,以区别于向量 $\overrightarrow{AB}$ 。

当学生掌握向量长度概念后,教师可用 $|\overrightarrow{AB}|$ 、 $|\overrightarrow{BC}|$ 、 $|\overrightarrow{AC}|$ 描述式(5)中所有向量的长度。以上三个向量均为非零向量,故其长度均为正数,用公式描述为:

$$|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| = \chi > |\overrightarrow{AC}|, \chi > 0 \quad (6)$$

教师请学生比较式(5)与式(6)。式(5)旨在确定新向量的起点与终点;式(6)旨在计算从起点至终点的移动过程中,向量运动轨迹所经过的路程。向量的路径是向量从起点出发,顺着封闭回路线路运动的轨迹。式(5)中向量的运动轨迹为 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{BC}$,其运动轨迹的路程之和为式(6)中的 $|\overrightarrow{AB}|$ 、 $|\overrightarrow{BC}|$ 。学生将 $|\overrightarrow{AB}|$ 、 $|\overrightarrow{BC}|$ 、 $|\overrightarrow{AC}|$ 视为 $\triangle ABC$ 各边边长,可推理得到式(6)中的不等式。

3.2 封闭回路与向量的起止点

当学生能准确区分向量长度与路径后,教师可引导学生平行移动向量,主动构建平面三角形封闭回路,求解不同起止点向量路径与长度问题。

在欧几里得二维空间中, O 为原点,向量经过 $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OB}$ 路径,请学生描述新向量的起点和终点。 $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OB}$ 有相同起点 O ,但其终点却不相同。学生可平行移动其中某个向量构建平面三角形封闭回路后,寻找经过以上路径向量的新终点以构建新向量。例如,可通过平行移动 $\overrightarrow{OB}$,使 $\overrightarrow{OB}$ 的起点 O 与 $\overrightarrow{OA}$ 终点 A 重合,构成 $\triangle AOB$ 。在 $\triangle AOB$ 中, O 为起点, B 为终点, $\overrightarrow{OB}$ 为新向量。 $\overrightarrow{OB}$ 的长度为 $|\overrightarrow{OB}|$, $\overrightarrow{OB}$ 经过路径的路程为 $|\overrightarrow{OA}|$ 与 $|\overrightarrow{AB}|$,用公式描述为:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \quad (7)$$

当学生能理解式(7)后,以此类推,在欧几里得二维空间中, O 为原点,向量经过 $\overrightarrow{AO}$ 、 $\overrightarrow{BO}$ 路径,请学生描述新向量的起点和终点。 $\overrightarrow{AO}$ 、 $\overrightarrow{BO}$ 起点不同,但是终点相同。学生再次平行移动 $\overrightarrow{AO}$,使其终点 O 与 $\overrightarrow{BO}$ 起点 B 重合,构成 $\triangle ABO$ 。在 $\triangle ABO$ 中, A 为向量起点, O 为终点, $\overrightarrow{AO}$ 为新向量。 $\overrightarrow{AO}$ 的长度为 $|\overrightarrow{AO}|$, $\overrightarrow{AO}$ 经过路径的路程为 $|\overrightarrow{AB}|$ 与 $|\overrightarrow{BO}|$,用公式描述为:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AO} \quad (8)$$

当学生能理解式(8)后,教师可运用平行向量知识加深学生对向量长度与路径的理解。假设 $\overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO}$,则 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BO}$ 可表示 $\overrightarrow{CD}$, $|\overrightarrow{AB}|$ 、 $|\overrightarrow{BO}|$ 、 $|\overrightarrow{CD}|$ 可构建三角不等式。教师可运用该例题引导学生从平行向量出发,更加全面深入地理解封闭回路的含义。如果学生仍然难以理解,教师可先用文字描述相关推理过程,等学生熟悉后,教师再请学生用公式描述。

封闭回路实质上已经说明了向量代数运算方法,其也是理解平面向量基本定理的基础,是解决向量问题的基本工具。如果学生能深入理解以上内容,则其后续学习较为轻松。

4 结语

从数学几何点、线、面出发,可以将向量概念分为数轴、平行线、封闭回路三部分。从数轴考察,向量是数对(坐标)间位移的路径。从平行线考察,共线向量、全等向量均是一组特殊的平行向量。从封闭回路考察,可区分向量的路径与长度,并可用封闭回路构造向量。封闭回路是向量概念的核心,限于篇幅,本研究未能从欧几里得一维空间、二维空间、三维空间出发全面深入解释其含义。多数情况下,运用向量讲授几何定理、求解几何试题更为简便。在未来教学中,教师可应用向量设计几何教学新方法与新体系。

参考文献

- [1] 同济大学数学教研室. 高等数学[M]. 4版. 北京: 高等教育出版社, 1996: 375.
- [2] 吕松涛. 平面向量加法运算的本质及教学思考[J]. 数学通报, 2020, 59(9): 43-47.
- [3] 吴莉娜, 陈玉娟. 例谈“平面向量”中“结构模式”的建构和应用: 一道2019年高考题引发的思考[J]. 数学通报, 2020, 59(6): 32-36.
- [4] 范世祥. 提高教学设计站位需要整体把握教学内容: 以“向量的概念及表示”教学为例[J]. 江苏教育, 2020(19): 41-44.
- [5] 熊翼. “平面向量的实际背景及基本概念”教学设计[J]. 中国数学教育, 2015(10): 9-13.
- [6] 西蒙, 布鲁姆. 经济学中的数学[M]. 杨介棒, 何辉, 译. 10版. 北京: 中国人民大学出版社, 2012: 173.
- [7] 张景中, 彭翥成. 绕来绕去的向量法[M]. 1版. 北京: 科学出版社, 2010: 19.
- [8] 郑宇邻. 例析向量解题中的几种方法[J]. 中学数学研究, 2019(4): 34-36.

(责任编辑: 吴静)