

穿插章末专题复习 提升高三一轮效能

——以“三角形中的最值问题”为例



江苏 张朋举

一、问题提出

在高三一轮复习期间,学生们往往是有题就做,不对知识和方法进行梳理,头脑中的方法是孤立和零散的,如此反复的训练,不仅没能形成自己的解题思维,反而造成思维僵化.如果教师们的教学又仅停留在就题讲题的层面,就不能促使学生对解题方法形成结构化,从而导致学生有很多方法联想不起来或选用不合理,一轮复习后学生的学习就会停滞不前,提升空间很小.

“章末专题”复习是指对某一章内容进行过一轮复习后,围绕本章复习的重点和关键点进行设计,以一个主题为研究中心,从“最原始”的概念开始,利用具有紧密相关性的知识和方法形成专项研究的一种教学方法,其具有见微知著的功效,能够有效帮助学生建立知识间的联系,促进学生高效学习.笔者所在学校的高三备课组,为了使复习更具成效,让学生及时对一章内容的基本问题进行归类,在短时间内容习得解决一类问题的方法,通过研究和实践,提出了在一轮复习中穿插章末专题的复习模式,收效显著.以下笔者以“三角形中的最值问题”的教学为例,谈谈具体做法,不妥之处还请批评指正.

二、专题复习的设计

1. 问题归类,联想方法

教师对专题中的基本问题进行归类,确定解决此类问题完整、清晰的方法,遵循“先方法后选题”的原则,编制课前检测(以下简称:前测)训练内容,要求一个基本问题对应一个题目,或者一题多问,选取的题目要与方法直接对应,并要求学生利用课外时间独立完成.这样不仅可以了解学生对本专题的掌握情况,而且还能帮助学生通过题目对问题进行归类,发现一类问题的基本特征,联想到相关的结论或方法.基本操作流程如下:

教师准备:

制定学习目标



根据“先方法后选题”的原则编写前测

学生准备:



学生利用课外时间独立完成前测



学生形成对一类问题基本特征的认识



上交反馈

教师准备:



批改,了解学情,挑选样本

“三角形中的最值问题”的基本问题大致有三类:(1)与角有关的最值问题;(2)与边有关的最值问题;(3)与周长或面积有关的最值问题.其处理思路有以下三个方向:思路1,化角处理,即利用正弦定理、三角形边长的隐含条件等将边化为角,最终转化为求三角函数的最值问题;思路2,化边处理,即利用正弦定理、三角形内边的隐含条件等将角化为边,最终转化为一元函数求最值或者转化为二元函数利用基本不等式处理;思路3,结合图形特征,化为平面几何或解析几何模型,最终利用几何性质,通过数形结合解决最值问题.基于以上分析,笔者选择如下3道前测试题.

(1)在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为角 A, B, C 的对边.若



$a\cos B=2b\cos A$, 则 $\tan(A-B)$ 的最大值为_____.

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为角 A, B, C 的对边. 若 $3a\cos C+b=0$, 则 $\tan B$ 的最大值是_____.

(3) 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 的对边. 若 $a=2$ 且 $A=\frac{\pi}{3}$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为_____.

分析: 前测(1)对应思路1, 前测(2)对应思路2, 前测(3)对应思路3, 学生通过前测3个问题的解决, 不仅回顾了解决这类问题的思路, 还形成了对这类问题的基本特征的认识. 前测的设置不仅促进了学生的“学”, 而且还促进了教师的“教”, 教师通过及时批改前测试题, 很好地诊断了学生的学情, 进而及时调整自己的教学.

2. 师生对话, 提炼方法

对数学问题的有效解决不仅仅表现为对问题的思考, 学生与老师、学生与学生之间对问题的深度对话, 更是对数学实质的一种思辨和表达; 有效的生生和师生对话不仅能缩短师生之间、生生之间的思维落差, 以实现思维同频共振、互动耦合、螺旋上升, 也能让学生从知识到方法, 再到运用中形成数学思想. 通过前测的3道题的训练及学习展示的样本方法, 学生已经初步了解本专题要研究的基本问题和基本方法, 因此, 在本环节中, 教师要因势利导, 提出问题, 引发生生、师生的深度对话, 在对话中互相修正、补充、启发, 从而激发学生的认知活动, 最终共同构建出解决此类问题的方法结构图, 达到对方法的整体认识.

教学片断1:

师: 通过对前测的训练与思考, 结合刚刚展示的几位同学的解题方法, 大家对这类问题有什么认识? 先进行组内讨论.

生1: 这类最值问题可分为求角的最值(如前测1、2)、求边的最值、求面积的最值(如前测3)三种类型.

生2: 处理这类问题, 需要用到正、余弦定理, 三角形内角和定理、三角形面积公式、辅助角公式和基本不等式等知识.

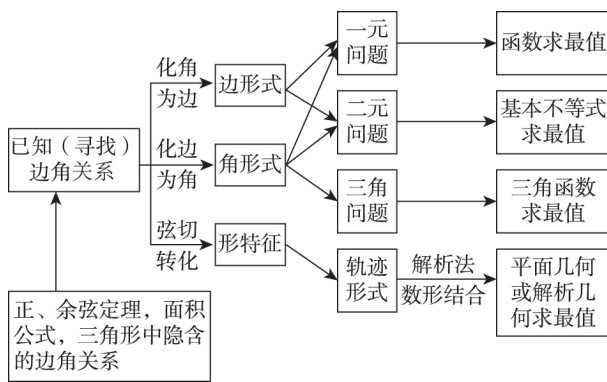
生3: 通过自己的思考和学习, 发现解决这类问题基本上有三种思路: 一是边化角, 转化为三角函数最值问题; 二是角化边, 转化为一元函数或二元函数的最值问题; 三是结合图形特征, 化为平面几何或解析几何模型.

生4: 根据已知条件和问题的特征合理选择三种思路.

一般地, 当题目条件所给的边或者正弦值为齐次式时, 可以运用正弦定理进行边角转化. 而如果出现边的二次或者两边之积时, 符合余弦定理的特征, 则可考虑用余弦定理进行边角转化. 当然, 当三种思路均可行时, 选择运算简洁又能讲清楚、写明白的思路.

师: 生4为我们解这类题提供了清晰的解题方向. 同学们, 发挥你们的聪明才智, 能不能将生4提供的方法以结构图的形式呈现呢?

最终通过生生、师生对话和教师的及时帮助, 形成如下可操作的方法结构图:



分析: 通过生生、师生的深度对话, 引入解题方法结构图, 既方便学生解题时操作, 也方便课后复习, 还可以让学生对解题方法的形成过程有深刻的体会, 帮助学生理清问题、已经储存的主要知识点和零散的解题方法之间的联系, 在解题时迅速迁移出所储备的知识和方法, 产生方法联想, 让学生学会思考数学问题, 进而形成自己的解题思维.

3. 选择方法, 解决问题

虽然学生在头脑中储备了方法结构, 但涉及综合性问题, 学生会出现无法归类, 无法与方法结构建立联系, 或归类后无法判断哪种方法更合理、更简洁的问题. 因此, 教师可以选择涉及几类问题或多种思路的综合问题进行例题教学, 教师通过回归方法结构, 引导学生对例题进行类型识别、回归方法结构联想方法. 如“三角形中最值问题”设置如下例题.

例: 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $b+c=2a$ 且 $a=6$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

利用方法结构图中的三种思路, 得到如下解题方法:

思路1: 化边为角处理, 由 $b+c=12$, $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} =$



$$\frac{(b+c)^2 - 2bc - 36}{2bc} = \frac{108 - 2bc}{2bc} = \frac{54}{bc} - 1, \text{ 所以 } bc = \frac{54}{\cos A + 1},$$

$$\triangle ABC \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{27\sin A}{\cos A + 1}. \text{ 针对这个式子有如下三种解法:}$$

解法 1: 因为 $bc \leq \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 = 36$, 所以 $\cos A \geq \frac{1}{2}$, 又因

$$\text{为 } 0 < A < \pi, \text{ 所以 } A \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right], \text{ 由于 } S' = \frac{27}{\cos A + 1} > 0, \text{ 所以}$$

$$S \text{ 在 } \left(0, \frac{\pi}{3}\right] \text{ 上单调递增, 故 } S_{\max} = 9\sqrt{3}.$$

$$\text{解法 2: } S = \frac{27\sin A}{\cos A + 1}, A \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right], \text{ 利用二倍角公式化}$$

$$\text{简得 } S = 27\tan \frac{A}{2}, \text{ 因为 } A \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right], \text{ 则 } \frac{A}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right], \text{ 由正}$$

$$\text{切函数在 } \left(0, \frac{\pi}{6}\right] \text{ 上单调递增可得 } S_{\max} = 9\sqrt{3}.$$

$$\text{解法 3: 已知 } A \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right], \text{ 令 } x = \cos A, x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right),$$

$$y = \sin A, y \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right], \text{ 则 } x^2 + y^2 = 1, \text{ 所以 } S = \frac{27y}{x+1}, \text{ 问题转}$$

$$\text{化为点 } C(-1, 0) \text{ 和圆弧上的点连线的斜率的取值范围问}$$

$$\text{题, 不妨记圆弧的两个端点分别为 } A(1, 0), B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \text{ 如}$$

$$\text{下图所示: 由 } k_{BC} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 可得 } S_{\max} = 9\sqrt{3}.$$

$$\text{思路 2: 利用化角为边处理, 由 } b+c=12, \cos A =$$

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - 2bc - 36}{2bc} = \frac{108 - 2bc}{2bc} = \frac{54}{bc} - 1, \text{ 又因}$$

$$\text{为 } 0 < A < \pi, \text{ 所以 } \sin A = \frac{\sqrt{108bc - 54^2}}{bc}, \triangle ABC \text{ 的面积 } S =$$

$$\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}\sqrt{108bc - 54^2}, \text{ 又 } bc \leq \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 = 36, \text{ 所以}$$

$$S_{\max} = 9\sqrt{3}.$$

$$\text{思路 3: 利用几何特征处理, 具体做法如下: 以 } BC \text{ 所在}$$

$$\text{直线为 } x \text{ 轴, } BC \text{ 的中垂线所在直线为 } y \text{ 轴建立平面直角坐}$$

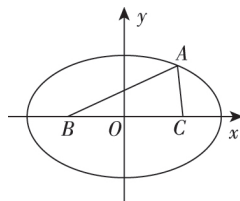
$$\text{标系, 则 } B(-3, 0), C(3, 0), \text{ 于是 } AB+AC=12 > BC, \text{ 因此}$$

$$\text{点 } A \text{ 的轨迹为以 } B, C \text{ 为焦点的椭圆(除去左右两个顶点),}$$

$$\text{如下图所示, 其方程为 } \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1 (x \neq \pm 6), \text{ 故当点 } A \text{ 移动}$$

到椭圆的上端点(或下端点)时, $\triangle ABC$ 的面积取最大为

$$S_{\max} = 9\sqrt{3}.$$



分析: 通过回归方法结构, 学生学会将新问题与已有的

方法结构建立联系, 进而更准确、更迅速地提取方法, 促进

思维联想的针对性和有效性, 从而达到方法结构的迁移. 更

重要的是通过回归方法结构, 对问题进行多视角探究, 学生

的思维得到了锻炼, 分析问题和解决问题的能力得到了提

升, 这对于学生是终身受益的.

4. 反馈练习, 提升素养

现代系统科学的反馈理论指出: 任何系统只有通过反

馈信息, 才能实现控制, 教学也是如此. 在课后, 教师通过采

取科代表普查、教师抽查等形式来监督学生及时对专题讲

义进行整理, 并运用各种解法重新试做一遍讲义上的例题,

理解方法的选择和优化, 为学生回归方法结构提供重复、可

见的资料, 加强对认知结构的巩固. 除此之外, 教师还会依据

本专题所涉及的方法选择小题和涉及几类问题或几种方法

的综合问题, 设置反馈练习, 练习一般以 10 道题左右为宜,

促进学生对本专题的方法结构的巩固, 提高学生回归方法结

构的意识. 对反馈练习进行讲评时, 应基于讲义中的方法结

构联想, 以方法结构作为迁移点, 不断引导学生联想与回归,

突出方法结构的应用, 提升方法结构应用的针对性. 还应引

导学生每周安排时间复习方法结构, 分析错误原因, 思考方

法的选择和优化, 回顾方法结构, 加强对知识迁移的巩固.

三、结束语

总之, 高三的一轮复习不应只是对知识点和方法的简

单重复, 应该做到在温故知新的基础上, 进一步丰富学生的

方法联想能力, 构建方法结构的章末专题复习模式, 不仅让

学生对解决一类问题的基本方法形成结构, 还让学生学会

通过回归已有的认知结构, 将复杂问题简单化, 简单问题明

朗化, 这对突破学生的数学思维障碍起到极其重要的

作用. [7]

(作者单位: 江苏省南京市南京师范大学附属扬子中学)

