编者按 为密切编辑部与中学的联系，本刊编委第 28 次“走进课堂”，于 2022 年 9 月 15 日赴江苏省句容高级中学观课议课.江苏省句容高级中学由句容文化名人丁宣孝先生创建于 1926 年，建校以来，虽历经风雨涤荡，几易校名，但终能弦歌不辍，薪火相续.近百年砥砺风雨，学校积淀了丰富而深厚的文化底蕴.学校秉承“诚·毅”校训，大力打造“诚毅果行，守正出新”的精神文化，形成了“爱国、守纪、勤奋、健美”的校风，“敬业、奉献、求实、创新”的教风和“奋发、探索、团结、进取”的学风.学校曾获“江苏省文明单位”“江苏省实施素质教育先进学校”等多项省部级集体荣誉.近几年来，承载着创建“高品质示范高中”的梦想，全校上下立足新起点，瞄准高目标，坚持“以人为本，立德为先，民主和谐，全面发展”的办学理念，着眼于校园文化建设，在努力使所有学生得到充分发展的同时，积极促进教师素质的全面提升，争取大幅度提高教育教学质量，以期使学校综合办学绩效获得社会的更广泛认可.

单元整体视角下的高中数学概念复习教学的实践与探索
——以“解三角形”一轮概念复习教学为例*

吴万征 （江苏省句容高级中学 212400）

作者简介 吴万征，江苏省句容高级中学高三数学教师兼班主任，镇江市十佳教师，镇江市中小学教师学科带头人，句容市吴万征教师工作室领衔人.任教高三教学十余载，教学追求简洁、明快，注重授人以渔，努力争取教学生学会分析问题、学会思考、学会总结、学会反思；努力将学生融入课堂教学，启迪学生思维，引导学生的思维自然地流淌.近年来在省级以上刊物上发表多篇论文.

摘 要 本文以“解三角形”一轮概念复习教学为例，实践和探索了单元整体视角下的高中数学概念复习教学：把解三角形归结于向量的应用，围绕 $\triangle ABC$ 满足的向量等式 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$ 的数量化，用算两次的方法统一余弦定理、正弦定理和射影定理的证明，并以此为纲构建整章的知识体系；同时以余弦定理结论中的两个式子推导第三个式子，以及以余弦定理、正弦定理相互推导为例，呈现定理之间的内在逻辑关系，进而揭示定理的本质.

关键词 高三数学；一轮复习；整体视角；解三角形

文章编号 1004-1176(2022)12-0024-05

1 学情分析

本次教学对象是四星级高中的高三物化生组合实验班学生，基础较好，有较强的自主学习能力、运算能力和综合运用知识解决问题的能力.

2 考点解读及教学目标

纵观近几年高考数学全国卷，解三角形是重点考查内容之一，其本质是在三角形内蕴方程的基础上将试题设定的条件与内蕴方程建立联系，求得三角形部分度量关系[1].解三角形或以选择题、填空题的形式出现，考查考生对三角形边角关系的理解、三角形面积公式的应用等；或以解答题的形式出现，考查三角恒等变换、正弦定理、余弦定理等知识点，考查降次、消元和换元等数学方法及数形结合、函数与方程和转化回归等数学思想，大多是中等难度试题，灵活多变，具有良好的区分度，要求考生具有一定的运算求解能力和逻辑思维能力，同时要求考生能合理选择解题方法.

教学目标 (1) 通过对 $\triangle ABC$ 满足的向量等式 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$ 的数量化这根主线，统一余弦定理、正弦定理和射影定理的证明方法，体会算两次的算法思想，同时凸显向量的工具价值；(2) 通过对解三角形知识点的来龙去脉的复习，构建这一章节的单元知识体系，形成前牵后连的知识网状结构；(3) 通过余弦定理、正弦定理、射影定理结论中的两个式子推导第三个式子，以及余弦定理、正弦定理相互推导，感受知识间的内在逻辑和思想方法，从而实

* 本文系江苏省教育科学“十三五”规划 2020 年度课题“核心素养视域下高中数学概念教学的研究”(C-a/2020/02/20)的阶段性成果.

现对定理的本质更深刻的理解，同时体会事物之间的普遍联系与辩证统一.

教学重点　从单元整体的视角构建《解三角形》这一章的知识体系.

教学难点　(1) 用余弦定理、正弦定理、射影定理结论中的两个式子推导第三个式子；(2) 余弦定理与正弦定理等价性证明.

3　主要教学过程

3.1　开门见山，直奔主题

师：同学们，我们今天复习“解三角形”.

问题 1　对于 $\triangle ABC$ 中最基本的向量等式 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$，你有哪些认识？

生 1：从向量相等的角度看，$\overrightarrow{BC}$ 与 $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$ 方向相同、模相等.

师：如何通过向量运算得出三角形的边角关系？

生 1：模相等——两边平方，展开可得 $|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{BA}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}$.

师：如图 1，在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c.你的结论是——

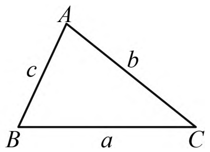

图 1

生 1：余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

师：你可以说说余弦定理的文字语言吗？

生 1：三角形任何一边的平方等于其他两边平方的和减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍.

师：真不错.余弦定理的符号语言呢？

生 1：刚才的式子和 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

师：生 1 通过把向量等式两边平方，通过算两次得到余弦定理.这是向量等式数量化的结果.

问题 2　你还有其他证明余弦定理的方法吗？请说说证明的思路.

生 2：以点 B 为坐标原点、BC 所在直线为 x 轴、垂直 BC 的直线为 y 轴建立平面直角坐标系，得到 A,C 的坐标，用两点间距离求出线段 AC，另一方面 $AC=b$，就证得余弦定理的一个等式.其他两个同理可证.

师：用解析法把线段 AC 算两次得到余弦定理，把几何问题代数化.余弦定理还有其他形式吗？

生 3：夹角公式 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

师：夹角公式的用途是——

生 3：一方面更方便记忆公式，另一方面可以解决已知三角形三边求三内角的问题.

师：这是余弦定理能解决的斜三角形的一类问题.余弦定理还有其他用途吗？

生 3：已知两边及其夹角，求第三边及其他两角.

师：在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a，b,c，则 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ ①，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ ②，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ ③.余弦定理的这三个式子对称、轮换，非常完美.我们在学习诱导公式的时候，用两组公式可以推导第三组公式.在这里，有一个类似的问题：

问题 3　在余弦定理的三个式子中，取其中两个，能否推导出第三个？例如，由 ①② 两式能否推导出 ③ 式？请思考.

生 4：可以的.由 ①② 两式可以归纳出 ③ 式是显然成立的.(生众笑)

师：请给出“显然成立”的证明.

生 4：……(挠耳表示不知，生众笑)

师：此时，我们怎样分析问题？

生众：观察条件和结论.问自己两个问题：条件是什么？结论是什么？

师：波利亚的怎样解题的方法深入骨髓！条件是什么？

生众：① 式和 ② 式.

师：结论是什么？

生众：③ 式.

师：条件与结论之间有哪些联系？

生 4：$A+B+C=\pi$.

师：通过三角形内角和定理建立三个式子的联系，说明三个式子之间是相互独立的，那么取其中两个，不能推导出第三个.如果补充条件 $A+B+C=\pi$，那么要证明 ③ 式，只要证明 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.结合 ①② 两式，从等式左边往右边证，即证 $\cos C=-\cos(A+B)=-\cos A\cos B+\sin A\sin B$，用同角三角函数关系和 ①② 两式把角关系转化为边关系.请同学们尝试证明.

巡视发现，学生的问题出在化简代数式 $-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+\sqrt{1-\left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2}\cdot\sqrt{1-\left(\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)^2}$.教师引导点拨：上述代数式 $=\dfrac{1}{4abc^2}(2a^2c^2+2b^2c^2-2c^4)=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，即得 ③ 式.

师：对于 $\triangle ABC$ 中最基本的向量等式 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$，通过向量运算还可以得出三角形的哪些边角关系？

生5：在向量等式两边点乘 $\overrightarrow{BC}$，化简得到 $a=b\cos C+c\cos B$；点乘 $\overrightarrow{BA}$，化简得到 $c=a\cos B+b\cos A$；点乘 $\overrightarrow{AC}$，化简得到 $b=a\cos C+c\cos A$.

师：这样把向量等式数量化后得到一般三角形的射影定理.直角三角形的射影定理是？

生5：如图2，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=\frac{\pi}{2}$，$AD\perp BC$ 于点 D，则有 $AD^2=BD\cdot DC$，$AB^2=BD\cdot BC$，$AC^2=DC\cdot BC$.

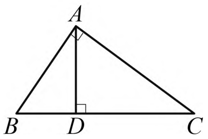

图2

师：怎么证明？

生5：用三角形相似证明.

师：在射影定理的三个式子中，取其中两个，能否推导出第三个？留作同学们课后思考.

师：对于 $\triangle ABC$ 中最基本的向量等式 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$，通过向量运算还可以得出三角形的哪些边角关系？

生6：取 BC 边中点 D，连结 AD.在向量等式两边点乘 $\overrightarrow{AD}$，得到 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})$，化简得到 $a\cos\angle ADC=-c\cos\angle BAD+b\cos\angle CAD$.

师：确实得到一个等式.和前面的余弦定理与射影定理相比，老师觉得这个等式不美，请你想一个办法，把这个式子调整得简洁美观.

生6：$a\cos\angle ADC+c\cos\angle BAD=b\cos\angle CAD$.

师：等式里的 $\angle ADC$，$\angle BAD$，$\angle CAD$ 可以转为 $\triangle ABC$ 的内角吗？

生6：不可以.

师：这里的 AD 是边 BC 上的中线，可以调整一下吗？

生6：（恍然大悟）调整为边 BC 上的高线，得到 $c\cos\angle BAD=b\cos\angle CAD$，转化为 $c\sin B=b\sin C$，即 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.同理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，所以 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.这就是正弦定理.

师：为什么调整为高线后就可以得到正弦定理？

生6：调整为高线后就有两个垂直向量，它们的数量积等于零.同时得到两个直角三角形，把 $\angle BAD$ 和 $\angle CAD$ 转为它们的余角 $\angle B$ 和 $\angle C$.

师：大家同意他的看法吗？

生7：$\triangle ABC$ 的形状会影响结论的.

生6：不影响，不妨设 $\angle C$ 最大，讨论一下 $\angle C$ 为锐角、直角与钝角的情况就行了.

师：如此分类讨论，正弦定理的证明思路就严谨了.你可以说说正弦定理的文字语言吗？

生6：三角形的各边与它所对角的正弦之比相等.

问题4 你还有其他证明正弦定理的方法吗？请说说证明的思路.

生8：以点 B 为坐标原点、BC 所在直线为 x 轴、垂直 BC 的直线为 y 轴建立平面直角坐标系，得到点 A 的坐标 $(c\cos B,c\sin B)$，$\triangle ABC$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}ac\sin B$，同理可得 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$，$S=\frac{1}{2}ab\sin C$，就证得正弦定理.

生9：以锐角三角形为例，作 $\triangle ABC$ 的外接圆（图3），O 为圆心，连结 AO 并延长交圆 O 于点 D，连结 AD.由平面几何的性质，把 $\triangle ABC$ 的边角关系转化为 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 的边角关系.解 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 得 $\frac{c}{\sin C}=\frac{c}{\sin D}=2R$，同理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=2R$，就证得正弦定理.

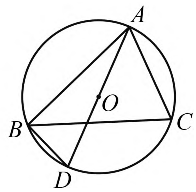

图3

师：生8建立直角坐标系，利用三角函数的定义把三角形面积算两次证明正弦定理；生9通过三角形的外接圆，将任意三角形问题转化为直角三角形问题证明正弦定理，得到了比值为三角形外接圆的直径.正弦定理的证明方法很多，在正弦定理的三个式子中，取其中两个，能否推导出第三个？留作同学们课后思考.

师：正弦定理有哪些常用变形式？

生10：① $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$；② $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$；③ $a\sin B=b\sin A$，$b\sin C=c\sin B$，$a\sin C=c\sin A$；④ $\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$；⑤ 在 $\triangle ABC$ 中，$a>b\Leftrightarrow A>B\Leftrightarrow\sin A>\sin B$.

师：请问第⑤式如何证明？

生10：大边对大角，然后用正弦定理把边关系转化为角关系.

师：在 $\triangle ABC$ 中，由 $A>B$ 能推导出 $\cos A$ 与 $\cos B$ 的大小关系吗？

生10：由余弦函数的单调性可知，在 $\triangle ABC$ 中，$A>B\Leftrightarrow\cos A<\cos B$.

师：换成正切呢？

生 10：不好判断.

师：你的知识体系很完整，点个赞！

师：正弦定理能解决斜三角形哪些问题？

生 11：已知两角与任一边，求其他两边及一角；已知两边与其中一边对角，求另一边及两角.

3.2　互证定理，深化理解

问题 5　正弦定理、余弦定理、射影定理都是三角形基本要素之间的等量关系，那么它们之间有怎样的联系呢？是相互等价的吗？以正弦定理与余弦定理为例，请尝试.

师：条件是什么？

生 12：$\triangle ABC$ 满足正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

师：这个条件有其他形式吗？

生 12：$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$.

师：目标是什么？

生 12：证明余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，另外两个式子同理可证.

师：目标有其他表达形式吗？

生 12：$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

师：目标与条件有什么关系？

生 12：可以把条件代入目标，化简整理.

师：思路很清晰，用证明等式的想法，化繁为简.请板书你的证明过程，其他同学在稿纸上证明.

生 12：由 $A+B+C=\pi$ 及正弦定理知 $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A}{\sin B\sin C}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2(B+C)}{\sin B\sin C}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2 B+\sin^2 C-(\sin B\cos C+\cos B\sin C)^2}{\sin B\sin C}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sin^2 B\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos B\cos C}{\sin B\sin C}=\sin B\sin C-\cos B\cos C=-\cos(B+C)=\cos A$，即 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

同理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

师：类比刚才的用正弦定理证明余弦定理，请由余弦定理证明正弦定理.

生 13：不太好证明.

师：我们一起分析，条件是什么？

生 13：$\triangle ABC$ 满足余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

师：目标是什么？

生 13：证明正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，其他同理.

师：条件向目标转化，还是目标向条件转化？

生 13：两个方向都不太好处理.

师：请观察条件和目标，它们具有怎样的结构特征？

生 13：条件是三个二次的等式，目标是分子和分母都是一次的分式.

师：降幂好，还是升幂？

生 13：升幂，$a^2\sin^2 B=b^2\sin^2 A$.

师：升幂后的目标与条件有联系吗？

生 13：再转化为 $a^2(1-\cos^2 B)=b^2(1-\cos^2 A)$.

师：如何证明这个等式？

生 13：即证 $a^2\cos^2 B-b^2\cos^2 A=a^2-b^2$.

师：思路厘清了.请板书你的证明过程，其他同学在稿纸上证明.

生 13：由余弦定理知

$$a\cos B=a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\ ①,$$

$$b\cos A=b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\ ②.$$

由①②得 $a^2\cos^2 B-b^2\cos^2 A=\frac{(a^2+c^2-b^2)^2}{4c^2}-\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4c^2}=\frac{1}{4c^2}[(a^2+c^2-b^2)+(b^2+c^2-a^2)][(a^2+c^2-b^2)-(b^2+c^2-a^2)]=\frac{1}{4c^2}[2c^2\cdot 2(a^2-b^2)]=a^2-b^2$，所以 $a^2(1-\cos^2 B)=b^2(1-\cos^2 A)$，即 $a^2\sin^2 B=b^2\sin^2 A$，也即 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$. 同理 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，所以 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

师：两位同学的数学基本功很强.我们在分析和解决问题的时候，经常问问自己：已知条件是什么？目标结论是什么？它们两者之间的关系是什么？已知条件可以转化吗？目标结论可以转化吗？转化后，它们两者之间的关系是什么？

问题 6　对于解三角形，你还有补充吗？

生 14：三角形的面积公式：① $S=\frac{1}{2}ah$，② $S=\frac{1}{2}ab\sin C$，③ 海伦公式 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$，其中 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，④ 坐标公式 $S=\frac{1}{2}|x_1y_2-$

$x_2y_1|$.

生 15:角平分线定理! 如图 4,在 $\triangle ABC$ 中,AD 是 $\angle BAC$ 的平分线,则 $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$.

师:你可以证明吗?

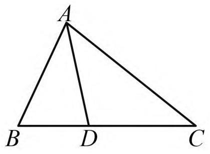

图 4

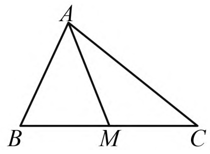

图 5

生 15:结合条件“AD 是 $\angle BAC$ 的平分线”,分别在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中用正弦定理,然后两式相比就得证.

师:这是三角形的内角平分线定理.外角平分线定理呢?

生 15:在 $\triangle ABC$ 中,$\angle A$ 的外角平分线交 BC 的延长线于 D,则 $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$.

生 16:三角形中线长公式.如图 5,在 $\triangle ABC$ 中,AM 是 BC 边上的中线,则 $AM=\frac{1}{2}\sqrt{2(AB^2+AC^2)-BC^2}$.

师:你可以证明吗?

生 16:结合条件“AM 是 BC 边上的中线”,分别在 $\triangle ABM$ 和 $\triangle ACM$ 中用余弦定理的夹角公式,然后两式相加就得证.

师:三位同学补充了三角形的面积公式、三角形角平分线定理和中线长公式三个常用的结论,并用算两次的算法思想给出了相应的证明.

3.3 归纳小结,呼应主题

师:本节课,我们围绕 $\triangle ABC$ 的最基本向量等式 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$ 数量化,复习了正弦定理、余弦定理和射影定理的内容、证明方法以及其他证法;以余弦定理为例重新认识了这三个等式之间的关系;以正弦定理和余弦定理为例证明了它们的等价性;还有一些三角形的相关结论.

4 教学感悟

4.1 对标高考,概念复习课紧扣课本不疾而速再重现,唤醒数学知识记忆

2011 年高考数学陕西卷文理科第 18 题:叙述并证明余弦定理.此题考试结果很不理想,满分 12 分的题,平均分只有 5.43 分,而且,“叙述”定理部分可以得 4 分,可见“证明”定理部分几乎没有得分[2].这是 30 年后再次考查余弦定理的证明,而答案就在课本上.这就提醒我们一轮复习要紧扣课本:紧扣概念、定义、定理、公式等发生发展的过程;紧扣课本经典例题、练习和习题所蕴含的解题方法和数学思想,穿珠成串.

本节课,在学生复习课本的基础上,笔者两节课连上,在师生、生生交流间完成解三角形知识点的复习.笔者不着急、不赶进度,给学生时间展示复习的成果,板书解答的过程.比如生 6 在向量等式数量化时,在等式两边点乘三角形中线所构成的向量得出等式后,笔者从等式对称美的角度,从用三角形基本要素表达的角度启发生 6 用三角形高线所构成的向量实现正弦定理的生成,并追问生 6 为什么用高线,把学生的思维“挤”出来,唤醒数学知识记忆.

4.2 注重生成,向量法一以贯之进行知识体系再建构,积累数学活动经验

概念复习课是一轮复习教学的常见课,也是基础课.笔者从教以来实践过的一轮概念复习课的模式有:当作新课带学生重新快速上一遍;带领学生简单罗列教材上的知识点;将概念的关键字删除后让学生完成概念填空;将概念融入简单习题作为前置作业由学生课前完成;布置学生自主整理章节思维导图等.如此概念复习教学,浮光掠影,都不能避免知识的碎片化,也不能促进学生在螺旋式教学中获得对概念更深层次的认识.《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》指出:关注单元知识的系统性,帮助学生理解数学的结构,增进复习的有效性,达到相应单元的“学业要求”[3]93;《中国高考评价体系》要求:对同一层面的知识、能力、素养能够横向融会贯通,形成完整的知识结构、能力结构网络[4].

本节课,笔者围绕“对于 $\triangle ABC$ 中最基本的向量等式 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$,通过向量运算得出三角形的哪些边角关系?”这一核心问题三问学生.一方面,通过对向量等式的数量化,用算两次的算法思想自然生成余弦定理、射影定理和正弦定理,以此帮助学生厘清知识的来龙去脉,以便让学生不仅能掌握定理的表征,还能理解定理的生长点、生成过程和应用形式,既获得知识的宽度,又习得思维深度;另一方面,从单元整体视角出发,把《解三角形》这一章归结于向量的应用,引导学生体会并理解知识的连贯性和过程的连续性和一致性,积累用向量方法解决几何问题的数学活动经验.

4.3 凸显关联,着眼定理自身关系与相互关系再探究,培养逻辑推理素养

高三数学复习课时间紧、任务重、容量大、节奏快,

(下转第 37 页)

语言转译重视不够，训练较少，学生处理此种问题的方法和能力还很欠缺，问题 3 的测试结果就是一个例证.

当然，文字语言、图形语言和符号语言是一个不可分割的、统一的整体，它们能够互相渗透、互相印证、互相转化和互相补充，从文字语言到符号（图形）语言的转译可使具体、复杂的问题形象化、简单化；从符号语言到图形（文字）语言的转译能使简洁、抽象的问题具体化、直观化；从图形语言到文字（符号）语言的转译能使直观的、模糊的问题符号化、精确化[8].数学教学过程中，要多让学生对同一个数学问题用多种数学语言进行表达，使他们能够从多角度、多方位去发现和提出问题、分析和解决问题.这样经常性的数学语言"互译"，一定能使学生的数学语言转译能力得到提高，从而实现培养学生数学核心素养的目标.

参考文献

[1] 斯托利亚尔.数学教育学[M].丁尔陞，王慧芬，锺善基，等，译.北京：人民教育出版社，1984：71.
[2] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准（2017 年版）[M].北京：人民教育出版社，2018：8.
[3] 范叙保，汤炳兴，田中.数学能力成分的性别差异测试分析[J].数学教育学报，1999(4)：70-73，81.
[4] 朱永厂.高中生数学语言转化能力的现状及对策[J].数学通报，2004(6)：24-26.
[5] 钟进均.基于语言学视角的"说数学"探究[J].数学通报，2013，52(3)：11-14，17.
[6] 朱永厂.让思维在探究中升华——以 2018 年江苏高考第 13 题为例[J].中学数学月刊，2018(11)：49-51.
[7] 朱永厂.让探究成为一种习惯——以一道向量高考题为例[J].中学数学月刊，2020(5)：16-18.
[8] 陈振，陈玉凤.高中生数学建模意识问卷调查[J].中学数学月刊，2020(5)：34-36.

（上接第 28 页）

笔者曾经一度轻概念的复习，引导学生将概念一过，随即就进入刷题讲题循环模式，期待在刷题中学会刷题.结果是笔者忙碌于各种题型的总结，疲惫于各种试卷中难题的讲解，错过了给予学生对概念，尤其是核心概念在一轮复习中深层次再理解和融会贯通的机会，致使学生在考试中遇到所谓新题一筹莫展、束手无策.实践证明：高三数学复习中，应立足单元整体，在每一个章节复习起始课上，教师加强学习方法指导，帮助学生养成良好的数学学习习惯，敢于质疑、善于思考，理解概念、把握本质，数形结合、明晰算理，厘清知识的来龙去脉，建立知识之间的关联[2].这不仅不会影响复习的进度，还会更有效地帮助学生夯实数学基础知识，拓展基本技能，深化基本思想，积累基本活动经验，有利于促进学生通过发现事物内部以及事物之间的关系和规律将知道的一系列的数学事实构建成知识体系和模型，并向更完备的方向发展，形成解题思维的固着点，让逻辑推理的数学素养落地生根，事半功倍.

本节课，笔者看似一道例题没有讲、学生一道练习没有做，实则师生交流间至少完成了 8 道题：余弦定理、射影定理和正弦定理的证明，余弦定理的三个式子中的两个证明第三个，正弦定理与余弦定理等价性证明，以及用正弦定理证明三角形的角平分线定理，用余弦定理推导三角形的中线长公式.笔者抓住一轮复习的契机，通过余弦定理、正弦定理和射影定理的证明建立知识之间的深层联系，并基于联系，猜想并证明正弦定理和余弦定理的等价性，发展学生的逻辑推理素养.囿于学生的接受能力，笔者没有点明余弦定理和射影定理是等价的，而余弦定理是正弦定理的充分不必要条件，它们的等价是需要正弦定理加上三角形内角和定理的.这三者的等价性的本质因素是满足定理条件的六个元素是否构成一个三角形.在重温这些经典定理的证明以及定理的应用过程中，引导学生借助向量的运算，探索三角形边长与角度的关系，反复咀嚼算两次的思想，学习应用波利亚怎样解题的解题步骤解决难题，从而落实对学生分析问题和解决问题能力以及意志品质和关键能力的培养，进而实现"人人都能获得良好的数学教育，不同的人在数学上得到不同的发展"[3]9.

参考文献

[1] 教育部考试中心.高考试题分析（理科数学分册）2020 年版[M].北京：高等教育出版社，2020：35.
[2] 梅磊.考在余弦定理　意在正面引导——有感于 2011 年高考数学陕西卷第 18 题的导向功能[J].中学数学教学，2012(4)：49-50.
[3] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准（2017 版 2020 年修订）[M].北京：人民教育出版社，2020.
[4] 教育部考试中心.中国高考评价体系[M].北京：人民教育出版社，2019：30.