江苏省仪征中学2023届高三数学抢分计划（4）

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知全集$U=A\cup B=\{0,1,2,3,4,5,6\}$，$A\cap \complement_U B=\{1,3,5\}$，则$B=$（　　）．

A．$\{-1,0,2,4,6\}$　　B．$\{0,2,4,6\}$　　C．$\{-1,2,4,6\}$　　D．$\{2,4,6\}$

2．已知空间内不过同一点的三条直线m，n，l，则“m，n，l两两相交”是“m，n，l在同一平面”的（　　）．

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件　C．充分必要条件　D．既不充分也不必要条件

3．以点$(\frac{k\pi}{2},0)$ $(k\in\mathbf{Z})$为对称中心的函数是（　　）．

A．$y=\sin x$　　B．$y=\cos x$　　C．$y=\tan x$　　D．$y=|\tan x|$

4．某教学楼从二楼到三楼的楼梯共 10 级，上楼可以一步上一级，也可以一步上两级，某同学从二楼到三楼准备用 7 步走完，则第二步走两级台阶的概率为（　　）．

A．$\frac{1}{7}$　　B．$\frac{2}{7}$　　C．$\frac{3}{7}$　　D．$\frac{4}{7}$

5．车木是我国一种古老的民间手工工艺，指的是用刀去削旋转着的木头，可用来制作家具和工艺品，随着生产力的进步，现在常借助车床实施加工．现要加工一根正四棱柱形的条木，底面边长为 6cm，　高为 30cm．将条木两端夹住，两底面中心连线为旋转轴，将它旋转起来，操作工的刀头逐步靠近，最后置于离旋转轴$2\sqrt{3}$ cm 处，沿着旋转轴平移，对整块条木进行加工，则加工后木块的体积为（　　）cm^3．

A．$120(2\sqrt{3}+\pi)$　　B．$120(3\sqrt{3}+\pi)$　　C．$270(2+\frac{\pi}{2})$　　D．$270(1+\frac{3\pi}{2})$

6．复数$z=x+y\text{i}$（$x,y\in\mathbf{R}$，i 为虚数单位）在复平面内对应点$Z(x,y)$，则下列为真命题的是（　　）．

A．若$|z+1|=|z-1|$，则点Z在圆上　　B．若$|z+1|+|z-1|=2$，则点Z在椭圆上

C．若$|z+1|-|z-1|=2$，则点Z在双曲线上　　D．若$|x+1|=|z-1|$，则点Z在抛物线上

7．已知函数$f(x)$的导函数为$g(x)$，$f(x)$和$g(x)$的定义域均为$\mathbf{R}$，$g(x)$为偶函数，$f(x)-e^x-\sin x$也为偶函数，则下列不等式一定成立的是（　　）．

A．$f(0)=0$　　B．$g(0)=0$　　C．$f(x)<f(\text{e}^x)$　　D．$g(x)<g(\text{e}^x)$

8．已知向量$\vec{a}=(x+1,\sqrt{5}+y)$，$\vec{b}=(x-1,\sqrt{5}-y)$，满足$\vec{a}\perp\vec{b}$的动点$M(x,y)$的轨迹为E，经过点$N(2,0)$的直线l与E有且只有一个公共点A，点P在圆$x^2+(y-2\sqrt{2})^2=1$上，则AP的最小值为（　　）．

A．$3-2\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{2}-1$　　C．$2\sqrt{2}-2$　　D．1

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．已知两个离散型随机变量 X，Y，满足 $Y=2X+1$，其中 X 的分布列如下：

X	0	1	2
P	a	b	$\frac{1}{6}$

若 $E(X)=1$，则（　　）．

A．$a=\frac{1}{6}$　　B．$b=\frac{2}{3}$　　C．$E(Y)=2$　　D．$D(Y)=\frac{4}{3}$

10．已知函数 $f(x)=x^3-x^2-x+a(a\in\mathbf{R})$ 的图象为曲线 C，下列说法正确的有（　　）．

A．$\forall a\in\mathbf{R}$，$f(x)$ 都有两个极值点　　B．$\forall a\in\mathbf{R}$，$f(x)$ 都有三个零点

C．$\forall a\in\mathbf{R}$，曲线 C 都有对称中心　　D．$\exists a\in\mathbf{R}$，使得曲线 C 有对称轴

11．定义：在数列的每相邻两项之间插入此两项的积，形成新的数列，这样的操作叫作该数列的一次“美好成长”．将数列 1，2 进行“美好成长”，第一次得到数列 1，2，2；第二次得到数列 1，2，2，4，2；⋯；设第 n 次“美好成长”后得到的数列为 $1,x_1,x_2,\cdots,x_k,2$，并记 $a_n=\log_2\left(1\times x_1\times x_2\times\cdots\times x_k\times 2\right)$，则（　　）．

A．$a_2=5$　　B．$k=2^n+1$

C．$a_{n+1}=3a_n-1$　　D．数列 $\left\{\frac{3^n}{a_na_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和为 $\frac{1}{2}-\frac{2}{3^{n+1}+1}$

12．圆柱 OO_1 高为 1，下底面圆 O 的直径 AB 长为 2，BB_1 是圆柱 OO_1 的一条母线，点 P,Q 分别在上、下底面内（包含边界），下列说法正确的有（　　）．

A．若 $PA+PB=3$，则 P 点的轨迹为圆

B．若直线 OP 与直线 OB_1 成 $45°$，则 P 的轨迹是抛物线的一部分

C．存在唯一的一组点 P,Q，使得 $AP\perp PQ$

D．$AP+PQ+QB_1$ 的取值范围是 $[\sqrt{13},2\sqrt{3}+\sqrt{5}]$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．若 $\left(x+5\right)^{2023}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2023}x^{2023}$，$T=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2023}$，则 T 被 5 除所得的余数为________．

14．圆 O（O 为坐标原点）与直线 $l:x+y=2$ 相切，与直线 l 垂直的直线 m 与圆 O 交于不同的两点 P、Q，若 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}<0$，则直线 m 的纵截距的取值范围是__________．

15．已知正四棱锥的侧面是边长为 3 的正三角形，它的侧棱的所有三等分点都在同一个球面上，则该球的表面积为________．

16．若直线 l 是曲线 $y=\ln x$ 的切线，也是曲线 $y=e^{x-2}$ 的切线，则直线 l 的方程为________________________．

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．在① $2S_n=3a_n-3$；② $a_1=3$，$\log_3 a_{n+1}=\log_3 a_n+1$ 这两个条件中任选一个，补充在下面问题中，并解答问题．

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，满足________，$b_n=\dfrac{3n-9}{a_{n+1}},n\in\mathbf{N}^*$．

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若存在正整数 n_0，使得 $b_{n_0}\ge b_n$ 对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，求 n_0 的值．

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分．

18．随着网络技术的迅速发展，各种购物群成为网络销售的新渠道．在凤梨销售旺季，某凤梨基地随机抽查了 100 个购物群的销售情况，各购物群销售凤梨的数量情况如下：

凤梨数量（盒）	$[100,200)$	$[200,300)$	$[300,400)$	$[400,500)$	$[500,600]$
购物群数量（个）	12	m	20	32	m

（1）求实数 m 的值，并用组中值估计这 100 个购物群销售凤梨总量的平均数（盒）；

（2）假设所有购物群销售凤梨的数量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 为（1）中的平均数，$\sigma^2=12100$．若该凤梨基地参与销售的购物群约有 1000 个，销售凤梨的数量在 $[266,596)$（单位：盒）内的群为“一级群”，销售数量小于 266 盒的购物群为“二级群”，销售数量大于等于 596 盒的购物群为“优质群”．该凤梨基地对每个“优质群”奖励1000 元，每个“一级群”奖励 200 元，“二级群”不奖励，则该凤梨基地大约需要准备多少资金？（群的个数按四舍五入取整数）

附：若 X 服从正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)\approx 0.683$，$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)\approx 0.954$，$P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)\approx 0.997$．

19．在△ ABC 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，$\sin^2 C=2\sin^2 B-2\sin^2 A$．

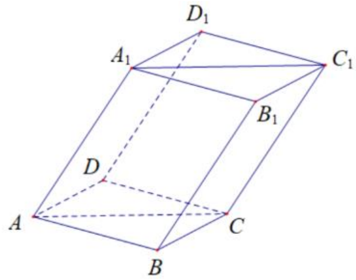
（1）求证：$c=4a\cos B$；

（2）延长 BC 至点 D，使得 $AD=BD$，求 $\angle CAD$ 的最大值．

20．如图，平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 6，截面 ACC_1A_1 的面积为 6．

（1）求点 B 到平面 ACC_1A_1 的距离；

（2）若 $AB=AD=2$，$\angle BAD=60°$，$AA_1=\sqrt{6}$，求直线 BD_1 与平面 CC_1D_1D 所成角的正弦值．



21．已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左顶点为 A，过右焦点 F 且平行于 y 轴的弦 $PQ=AF=3$．

（1）求△APQ 的内心坐标；

（2）是否存在定点 D，使过点 D 的直线 l 交 C 于 M,N，交 PQ 于点 R，且满足 $\overrightarrow{MR}\cdot\overrightarrow{ND}=\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{RN}$？若存在，求出该定点坐标，若不存在，请说明理由．

22．已知函数 $f(x)=a\sin x-\ln(1+x)(a\in\mathbf{R})$．

（1）若 $a=-1$，求证：$\forall x>0$，$f(x)+2x>0$；

（2）当 $a\geq1$ 时，对任意 $x\in[0,\dfrac{k}{2}]$，都有 $f(x)\geq0$，求整数 k 的最大值．

江苏省仪征中学2023届高三数学抢分计划（4）

数学参考答案

1．B　2．A　3．C　4．C　5．B　6．D　7．C　8．A

9．ABD　10．AC　11．ACD　12．BC　13．1　14．$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$　15．10π　16．$y=x-1$或$y=\frac{1}{e}x$

17．【解析】(1）若选择条件①：

$\because 2S_n=3a_n-3$　$\therefore 2S_{n+1}=3a_{n+1}-3$，则$2S_{n+1}-2S_n=3a_{n+1}-3a_n$

即$a_{n+1}=3a_n$，　……………………3 分

令$n=1$，则$2S_1=3a_1-3$，解得$a_1=3\neq 0$　$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n}=3$

$\therefore \{a_n\}$是以3为首项，3为公比的等比数列　$\therefore a_n=3^n$　……………………5 分

若选择条件②：

$\because a_1=3,\log_3 a_{n+1}-\log_3 a_n=1$　$\therefore \{\log_3 a_n\}$是以$\log_3 a_1=1$为首项，1为公差的等差数列

$\therefore \log_3 a_n=1+(n-1)\times 1=n$　……………………3 分

$\therefore a_n=3^n$　……………………5 分

（2）$\therefore b_n=\frac{3n-9}{a_{n+1}}=\frac{n-3}{3^n}$　……………………6 分

$\because b_{n+1}-b_n=\frac{n+1-3}{3^{n+1}}-\frac{n-3}{3^n}=\frac{7-2n}{3^{n+1}}$　……………………7 分

$\therefore$当$1\le n\le 3, b_{n+1}-b_n>0$，即$b_1<b_2<b_3<b_4$；

当$n\ge 4, b_{n+1}-b_n<0$，即$b_4>b_5>b_6>b_7>\cdots$；　……………………9 分

$\therefore$当$n_0=4$时，$b_{n_0}\ge b_n$对$\forall n\in\mathbf{N}^*$恒成立．　……………………10 分

18．【解析】(1）由题意得：$12+2m+20+32=100$，解得$m=18$．　……………………2 分

故平均数为$\frac{1}{100}\times(150\times 12+250\times 18+350\times 20+450\times 32+550\times 18)=376$．　……………………4 分

（2）由题意，$\mu=376$，且$266=376-110=\mu-\sigma$，$596=376+220=\mu+2\sigma$，

故$P(X>596)=P(X>\mu+2\sigma)=\frac{1}{2}\times(1-0.954)=0.023$，所以"优质群"约有$1000\times 0.023=23$个；

$P(266\le X<596)=P(\mu-\sigma<X<\mu+2\sigma)=\frac{1}{2}\times 0.683+\frac{1}{2}\times 0.954=0.8185$，

所以"一级群"约有$1000\times 0.8185=818.5\approx 819$个；　……………………9 分

所以需要资金为 $23\times 1000+819\times 200=186800$，

故至少需要准备186800元．　……………………12 分

19．【解析】(1）$\because \sin^2 C=2\sin^2 B-2\sin^2 A$

$\therefore$在$\triangle ABC$中，由正弦定理得$c^2=2b^2-2a^2$　………………2 分

$\because b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$　$\therefore c^2+2a^2=2b^2=2a^2+2c^2-4ac\cos B$　$\therefore c=4a\cos B$ ………………4 分

（2）$\therefore$在$\triangle ABC$中，由正弦定理得：$\sin C=4\sin A\cos B$（显然角B为锐角）

$\because$在$\triangle ABC$中，$\sin C=\sin(A+B)$　$\therefore \sin A\cos B+\cos A\sin B=4\sin A\cos B$

$\therefore \cos A\sin B=3\sin A\cos B$

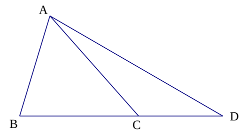
$\because$角B为锐角　$\therefore$角A也为锐角　$\therefore \tan B=3\tan A$　……………………8 分

$\because AD=BD$

$\therefore \angle B=\angle BAD=\angle A+\angle CAD$

$\therefore \angle CAD = B - A$ ……………………9 分

$\therefore \tan \angle CAD = \tan\left(B - A\right) = \dfrac{\tan B - \tan A}{1 + \tan B \tan A}$



由（1）可知 $\tan B = 3\tan A$， $A \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \tan \angle CAD = \dfrac{2\tan A}{1 + 3\tan^2 A}$

$= \dfrac{2}{\dfrac{1}{\tan A} + 3\tan A} \le \dfrac{2}{2\sqrt{\dfrac{1}{\tan A} \times 3\tan A}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ……………………11 分

当且仅当 $\dfrac{1}{\tan A} = 3\tan A$，即 $\tan A = \dfrac{\sqrt{3}}{3}, A = \dfrac{\pi}{6}$ 时取等号.

此时 $\angle DAC$ 的最大值为 $\dfrac{\pi}{6}$. ……………………12 分

20.【解析】(1）在平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $ABC - A_1B_1C_1$ 是三棱柱，

$V_{B-ACC_1A_1} = \dfrac{2}{3}V_{ABC-A_1B_1C_1} = \dfrac{1}{3}V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1} = 2$， ………………………………2 分

设点 B 到平面 ACC_1A_1 的距离为 d，则 $V_{B-ACC_1A_1} = \dfrac{1}{3}S_{ACC_1A_1} \cdot d = \dfrac{1}{3} \times 6d = 2$，所以 $d = 1$，

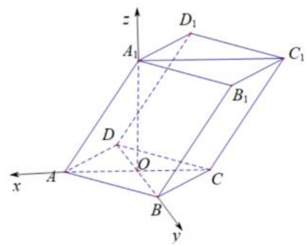
即点 B 到平面 ACC_1A_1 的距离为 1. ………………………………4 分

（2）在 $\square ABCD$ 中， $AB = AD = 2, \angle BAD = 60°$，所以 $ABCD$ 是菱形，连接 BD 交 AC 于 O，则 $BO = 1$，

由（1）知点 B 到平面 ACC_1A_1 的距离为 1，所以 $BO \perp$ 平面 ACC_1A_1. ………6 分

设点 A_1 在直线 AC 上射影为点 H， $S_{\square ACC_1A_1} = AC \cdot A_1H = 2\sqrt{3}A_1H = 6$，

则 $A_1H = \sqrt{3}$，且 $BO \perp A_1H$， $AH = \sqrt{AA_1^2 - A_1H^2} = \sqrt{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{3}$，



所以 O 和 H 重合，即 $A_1O \perp AO$. ………………………8 分

以 O 为坐标原点， OA, OB, OA_1 分别为 x 轴， y 轴， z 轴，建立空间直角坐标系，

则 $B(0,1,0), A(\sqrt{3},0,0), D(0,-1,0), A_1(0,0,\sqrt{3})$，

根据 $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{DD_1} = (-\sqrt{3},0,\sqrt{3})$ ， $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = (-\sqrt{3},1,0)$ ，则 $D_1(-\sqrt{3},-1,\sqrt{3})$,

$\overrightarrow{BD_1} = (-\sqrt{3},-2,\sqrt{3})$，设平面 CC_1D_1D 的一法向量为 $\vec{n} = (x,y,z)$，

则 $\begin{cases} \overrightarrow{DD_1} \cdot \vec{n} = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}z = 0 \\ \overrightarrow{DC} \cdot \vec{n} = -\sqrt{3}x + y = 0 \end{cases}$，取 $x = 1$，则 $\vec{n} = (1,\sqrt{3},1)$， ………………10 分

设直线 BD_1 与平面 CC_1D_1D 所成角为 α，则 $\sin\alpha = |\cos < \overrightarrow{BD_1}, \vec{n} > | = |\dfrac{\overrightarrow{BD_1} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{BD_1}||\vec{n}|}| = |\dfrac{-\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \sqrt{3}}{\sqrt{10} \times \sqrt{5}}| = \dfrac{\sqrt{6}}{5}$，

所以直线 BD_1 与平面 CC_1D_1D 所成角正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{5}$. ………………12 分

21.【解析】(1）$\because a^2 = b^2 + c^2, \dfrac{2b^2}{a} = a + c = 3 \therefore a = 2, b = \sqrt{3}, c = 1$

$\therefore$ 椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$， ………………2 分

不妨取 $P(1,\dfrac{3}{2}), Q(1,-\dfrac{3}{2}), A(-2,0)$，则 $AP = \dfrac{3\sqrt{5}}{2}, PF = \dfrac{3}{2}$；

因为△APQ 中， $AP = AQ$，所以△APQ 的内心在 x 轴，设直线 PT 平分 $\angle APQ$，交 x 轴于 T，则 T 为△APQ

的内心，且 $\frac{AT}{TF}=\frac{AP}{PQ}=\sqrt{5}$，所以 $AT=\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}$，则 $T(\frac{7-3\sqrt{5}}{4},0)$；…………4 分

（2）$\because$ 椭圆和弦 PQ 均关于 x 轴上下对称 $\therefore$ 若存在定点 D，则点 D 必在 x 轴上 $\therefore$ 设 $D(t,0)$ ………………6 分

设直线 l 方程为 $y=k(x-t)$，$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，直线方程与椭圆方程联立 $\begin{cases} y=k(x-t) \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，

消去 y 得 $(4k^2+3)x^2-8k^2tx+4(k^2t^2-3)=0$，

则 $\Delta=48(k^2+3-k^2t^2)>0$，$x_1+x_2=\frac{8k^2t}{4k^2+3}$，$x_1x_2=\frac{4(k^2t^2-3)}{4k^2+3}$ ① ………………8 分

$\because$ 点 R 的横坐标为 1，M、R、N、D 均在直线 l 上，$\overrightarrow{MR}\cdot\overrightarrow{ND}=\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{RN}$

$\therefore (1+k^2)(1-x_1)(t-x_2)=(1+k^2)(t-x_1)(x_2-1)$ ………………10 分

$\therefore 2t-(1+t)(x_1+x_2)+2x_1x_2=0$ $\therefore 2t-(1+t)\frac{8k^2t}{4k^2+3}+2\times\frac{4(k^2t^2-3)}{4k^2+3}=0$，整理得 $t=4$，

因为点 D 在椭圆外，则直线 l 的斜率必存在 $\therefore$ 存在定点 $D(4,0)$ 满足题意. ………………12 分

22.【解析】（1）$a=-1$ 时，设 $g(x)=f(x)+2x=-\sin x-\ln(1+x)+2x$，则 $g'(x)=-\cos x-\frac{1}{1+x}+2$，

$\because x>0 \therefore x+1>1$ $\therefore -\frac{1}{x+1}\in(-1,0)$ $\because \cos x\in[-1,1]$ $\therefore -\cos x-\frac{1}{x+1}+2>0$，即 $g'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立

$\therefore g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增 又 $g(0)=0$ $\therefore g(x)>g(0)=0$，即：$\forall x>0$，$f(x)+2x>0$；………………4 分

（2）$a=1$ 时，当 $k=4$ 时，$f(2)=\sin 2-\ln 3<0$，所以 $k<4$. ………………5 分

下证 $k=3$ 符合.

$k=3$ 时，当 $x\in[0,\frac{3}{2}]$ 时，$\sin x>0$，所以当 $a\geq 1$ 时，$f(x)=a\sin x-\ln(1+x)\geq\sin x-\ln(1+x)$.

记 $h(x)=\sin x-\ln(1+x)$，则只需证 $h(x)=\sin x-\ln(1+x)\geq 0$ 对 $x\in[0,\frac{3}{2}]$ 恒成立.

$h'(x)=\cos x-\frac{1}{x+1}$，令 $\phi(x)=\cos x-\frac{1}{x+1}$，则 $\phi'(x)=-\sin x+\frac{1}{(x+1)^2}$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 递减，

又 $\phi'(0)=1>0,\phi'(\frac{\pi}{2})=-1+\frac{1}{(\frac{\pi}{2}+1)^2}<0$，所以存在 $x_1\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得 $\phi'(x_1)=0$，

则 $x\in(0,x_1),\phi'(x_1)>0,\phi(x)$ 在 $(0,x_1)$ 递增，$x\in(x_1,\frac{\pi}{2}),\phi'(x_1)<0,\phi(x)$ 在 $(x_1,\frac{\pi}{2})$ 递减；

又 $\phi(0)=0,\phi(\frac{\pi}{2})=-\frac{1}{\frac{\pi}{2}+1}<0$，所以存在 $x_2\in(x_1,\frac{\pi}{2})$ 使得 $\phi(x_2)=0$，且 $x\in(0,x_2),\phi(x)>0,x\in(x_2,\frac{\pi}{2}),\phi(x)<0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,x_2)$ 递增，在 $(x_2,\frac{\pi}{2})$ 递减，又 $h(0)=0,h(\frac{\pi}{2})=1-\ln(1+\frac{\pi}{2})>0$，所以 $h(x)\geq 0$ 对 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 恒成立

因为 $[0,\frac{3}{2}]\subseteq[0,\frac{\pi}{2}]$，所以 $k=3$ 符合.

综上，整数 k 的最大值为 3. ………………12 分