南京盐城2023届高三年级第一次模拟考试

数学试卷

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请把答案填涂在答题卡相应位置上．

1．设 $M=\{x|x=\frac{k}{2}，k\in \mathbf{Z}\}$，$N=\{x|x=k+\frac{1}{2}，k\in \mathbf{Z}\}$，则

A．$M\subsetneqq N$　　B．$N\subsetneqq M$　　C．$M=N$　　D．$M\cap N=\varnothing$

【答案】B

【解析】$x=k+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(2k+1)$，故 $N\subsetneqq M$，故选B．

2．若 $f(x)=x(x+1)(x+a)\ (a\in \mathbf{R})$为奇函数，则 a 的值为

A．-1　　B．0　　C．1　　D．-1或1

【答案】A

【解析】由题得：$f(-1)+f(1)=0$，故 $a=-1$，故选A．

3．某种品牌手机的电池使用寿命 X(单位：年)服从正态分布 $N(4，\sigma^2)(\sigma>0)$，且使用寿命不少于2年的概率为0.9，则该品牌手机电池至少使用6年的概率为

A．0.9　　B．0.7　　C．0.3　　D．0.1

【答案】D

【解析】由题得：$P(x\geqslant 2)=0.9$，故 $P(x<2)=0.1$，根据对称性得：$P(x\geqslant 6)=P(x<2)=0.1$，故选D．

4．若函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)(0<\varphi<\pi)$的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$对称，则 φ 的值为

A．$\frac{\pi}{12}$　　B．$\frac{\pi}{6}$　　C．$\frac{\pi}{4}$　　D．$\frac{\pi}{3}$

【答案】B

【解析】由题得：$f(\frac{\pi}{6})=\pm 1$，故$\frac{\pi}{3}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in \mathbf{Z})$，而 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$．故选B．

5．三星堆古遗址作为“长江文明之源”，被誉为人类最伟大的考古发现之一．3号坑发现的神树纹玉琮，为今人研究古蜀社会中神树的意义提供了重要依据．玉琮是古人用于祭祀的礼器，有学者认为其外方内圆的构造，契合了古代“天圆地方”观念，是天地合一的体现．如图，假定某玉琮形状对称，由一个空心圆柱及正方体构成，且圆柱的外侧面内切于正方体的侧面，圆柱的高为12 cm，圆柱底面外圆周和正方体的各个顶点均在球 O

上，则球 O 的表面积为

A．$72\pi\ cm^2$　　　B．$162\pi\ cm^2$

C．$216\pi\ cm^2$　　　D．$288\pi\ cm^2$

【答案】C

【解析】不妨设正方体的边长为 $2a$，球 O 的半径为 R，则圆柱的底面半径为 a，因为正方体的体对角线即为球 O 直径，故 $2R=2\sqrt{3}a$，利用勾股定理得：$6^2+a^2=R^2=3a^2$，解得 $a^2=18$，球的表面积为 $S=4\pi R^2=4\pi\times3\times18=216\pi$，选 C.

6．设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n．已知 $S_{n+1}=2S_n+\frac{1}{2}$，$n\in\mathbf{N}^*$，则 $S_6=$

A．$\frac{31}{2}$　　　B．16　　　C．30　　　D．$\frac{63}{2}$

【答案】D

【解析】由题得：$S_{n+1}=2S_n+\frac{1}{2}$ ①，$S_{n+2}=2S_{n+1}+\frac{1}{2}$②，①－②得：$a_{n+2}=2a_{n+1}$，$q=2$，则 $S_n=\frac{a_1(1-2^n)}{1-2}=(2^n-1)a_1$，代入①中，即 $(2^{n+1}-1)a_1=2(2^n-1)a_1+\frac{1}{2}$，$a_1=\frac{1}{2}$，故 $S_6=\frac{63}{2}$，选 D.

7．已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的两条弦 AB，CD 相交于点 P(点 P 在第一象限)，且 $AB\perp x$ 轴，$CD\perp y$ 轴．若 $PA:PB:PC:PD=1:3:1:5$，则椭圆 E 的离心率为

A．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　　B．$\frac{\sqrt{10}}{5}$　　　C．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　　D．$\frac{2\sqrt{10}}{5}$

【答案】B

【解析】设 $P(m,n)$，根据椭圆的对称性得：$A(m,2n)$，$B(m,-2n)$，$C(\frac{3}{2}m,n)$，$D(-\frac{3}{2}m,n)$，将 A，C 代入椭圆方程中得：$\begin{cases}\frac{m^2}{a^2}+\frac{4n^2}{b^2}=1,\\ \frac{9m^2}{4a^2}+\frac{n^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 两式作差得$\begin{cases}n^2=\frac{5}{32}b^2,\\ m^2=\frac{3}{8}a^2,\end{cases}$ 而 $PA=PC$，即 $n=\frac{1}{2}m$，解得：$\frac{b^2}{a^2}=\frac{3}{5}$，故 $e=\frac{\sqrt{10}}{5}$，选 B.

8．设 a，$b\in\mathbf{R}$，$4^b=6^a-2^a$，$5^a=6^b-2^b$，则

A．$1<a<b$　　　B．$0<b<a$　　　C．$b<0<a$　　　D．$b<a<1$

【答案】A

【解析】因为 $4^b=6^a-2^a>0$，所以 $3^a>1$，所以 $a>0$，$5^a=6^b-2^b>0$，所以 $3^b>1$，所以 $b>0$，若 $a>b$，则 $5^a>4^a>4^b$，设 $f(x)=6^x-2^x=2^x(3^x-1)$在$(0,+\infty)$上单调递增，所以 $6^a-2^a>6^b-2^b$，即 $4^b>5^a$，不合题意，故选 A.

二、选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，请把答案填涂在答题卡相应位置上．全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，不选或有错选的得 0 分．

9．新能源汽车包括纯电动汽车、增程式电动汽车、混合动力汽车、燃料电池电动汽车、氢发动机汽车等．我国的新能源汽车发展开始于 21 世纪初，近年来发展迅速，连续 8 年产销量位居世界第一．下面两图分别是 2017 年至 2022 年我国新能源汽车年产量和占比（占我国汽车年总产量的比例）情况，则

A．2017～2022 年我国新能源汽车年产量逐年增加

B．2017～2022 年我国新能源汽车年产量的极差为 626.4 万辆

C．2022 年我国汽车年总产量超过 2700 万辆

D．2019 年我国汽车年总产量低于 2018 年我国汽车年总产量

【答案】BCD

【解析】略

10．已知 z 为复数，设 z，$\overline{z}$，iz 在复平面上对应的点分别为 A，B，C，其中 O 为坐标原点，则

A．$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|$　　B．$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OC}$　　C．$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BC}|$　　D．$\overrightarrow{OB}\,/\!/\,\overrightarrow{AC}$

【答案】AB

【解析】法 1：设 $z=a+b\text{i}(a，b\in\mathbf{R})$，$A(a，b)$，$B(a，-b)$，$C(-b，a)$，则 A，B 正确，C，D 错误，故选 AB．

法二：数形结合．

11．已知点 $A(-1，0)$，$B(1，0)$，点 P 为圆 C：$x^2+y^2-6x-8y+17=0$ 上的动点，则

A．$\triangle PAB$ 面积的最小值为 $8-4\sqrt{2}$

B．AP 的最小值为 $2\sqrt{2}$

C．$\angle PAB$ 的最大值为$\dfrac{5\pi}{12}$

D．$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$的最大值为 $8+4\sqrt{2}$

【答案】BCD

【解析】圆 C：$(x-3)^2+(y-4)^2=8$，圆心 $C(3，4)$，半径为 $r=2\sqrt{2}$，则$(S_{\triangle ABP})_{\min}=\dfrac{1}{2}|AB|\,|y_P|$

$\geqslant 4-2\sqrt{2}$，所以 A 错误；$(AP)_{\min}=CA-r=4\sqrt{2}-2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$，所以 B 正确；当 AP 与圆相切，且在圆心上方时，$\angle PAB$ 最大，由于$\angle CAB=\frac{\pi}{4}$，$CA=2r$，所以$(\angle PAB)_{\max}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{12}$，所以 C 正确；$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=2(x_P+1)\leqslant 2(4+2\sqrt{2})$，所以 D 正确，故选 BCD.

12．已知$f(\theta)=\cos 4\theta+\cos 3\theta$，且 θ_1，θ_2，θ_3 是$f(\theta)$在$(0，\pi)$内的三个不同零点，则

A．$\frac{\pi}{7}\in\{\theta_1，\theta_2，\theta_3\}$　　　　B．$\theta_1+\theta_2+\theta_3=\pi$

C．$\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3=-\frac{1}{8}$　　　　D．$\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3=\frac{1}{2}$

【答案】ACD

$f(\theta)=\cos 3\theta+\cos 4\theta=2\cos\frac{7\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$，因为 $0<\theta<\pi$，故 $0<\frac{\theta}{2}<\pi$，则 $\cos\frac{\theta}{2}>0$，则 $f(\theta)=0$，即 $\cos\frac{7\theta}{2}=0$，$\frac{7\theta}{2}=\frac{\pi}{2}$；$\frac{7\theta}{2}=\frac{3\pi}{2}$；$\frac{7\theta}{2}=\frac{5\pi}{2}$；则 $\theta_1=\frac{\pi}{7}$，$\theta_2=\frac{3\pi}{7}$，$\theta_3=\frac{5\pi}{7}$，所以 A 正确；B 错误；$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}=\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}=\dfrac{8\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{1}{8}$，C 正确，$\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=$

$\dfrac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}2\sin\frac{\pi}{7}(\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7})=\dfrac{\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{6\pi}{7}-\sin\frac{4\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{2}$，D 正确；故选 ACD.

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．请把答案填写在答题卡相应位置上．

13．编号为 1，2，3，4 的四位同学，分别就座于编号为 1，2，3，4 的四个座位上，每位座位恰好坐一位同学，则恰有两位同学编号和座位编号一致的坐法种数为___▲___．

【答案】6

【解析】$C_4^2=6$.

14．已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$．设 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}$，则 $\cos<\boldsymbol{a}，\boldsymbol{c}>=$___▲___．

【答案】$-\frac{4}{5}$

【解析】法一：设 $\boldsymbol{a}=(2，0)$，$\boldsymbol{b}=(0，3)$，则 $\boldsymbol{c}=(0，3)-2(2，0)=(-4，3)$，$\cos<\boldsymbol{a}，\boldsymbol{c}>=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|}=-\frac{4}{5}$.

法二：$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})^2}=\sqrt{b^2+4a^2}=5$，又 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})=-2a^2=-8$，则 $\cos<\boldsymbol{a}，\boldsymbol{c}>=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|}=\dfrac{-8}{10}=-\frac{4}{5}$.

15．已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，点 P 是其准线上一点，过点 P 作 PF 的垂线，交 y 轴于

点 A，线段 AF 交抛物线于点 B．若 PB 平行于 x 轴，则 AF 的长度为___▲___．

【答案】3

【解析】法一：设 $B(\frac{m^2}{4}，m)$，$P(-1，m)$，$A(0，n)$，由 $AP\perp PF$ 得$(1，n-m)\cdot(2，-m)=0$ 即 $2-mn+m^2=0$①A、B、F 三点共线得$\frac{n}{-1}=\frac{m}{\frac{m^2}{4}-1}$②，则由①②得 $m^2=2$，$n^2=8$，$AF=\sqrt{1+n^2}=3$．

法二：易得 B 是 AF 中点，则 $PB=\frac{1}{2}AF$，$PB=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，$AF=3$．

16．直线 $x=t$ 与曲线 C_1：$y=-e^x+ax(a\in\mathbf{R})$及曲线 C_2：$y=e^{-x}+ax$ 分别交于点 A，B．曲线 C_1 在 A 处的切线为 l_1，曲线 C_2 在 B 处的切线为 l_2．若 l_1，l_2 相交于点 C，则△ABC 面积的最小值为___▲___．

【答案】2

【解析】$A(t，-e^t+at)$，$B(t，e^{-t}+at)$，所以 l_1：$y-(-e^t+at)=(-e^t+a)(x-t)$，$l_2$：$y-(e^{-t}+at)=(-e^{-t}+a)(x-t)$，所以 $x_C-t=\frac{e^t+e^{-t}}{e^{-t}-e^t}$，所以△$ABC$ 面积为$\frac{1}{2}|x_C-t|(e^t+e^{-t})=\frac{1}{2}\frac{(e^t+e^{-t})^2}{|e^t-e^{-t}|}=\frac{1}{2}\frac{(e^t-e^{-t})^2+4}{|e^t-e^{-t}|}\geqslant 2$，当且仅当 $e^t-e^{-t}=2$ 时取“＝”．

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤．

17．（本小题满分 10 分）

在数列$\{a_n\}$中，若 $a_{n+1}-a_1a_2a_3\cdots a_n=d(n\in\mathbf{N}^*)$，则称数列$\{a_n\}$为“泛等差数列”，常数 d 称为“泛差”．已知数列$\{a_n\}$是一个“泛等差数列”，数列$\{b_n\}$满足 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=a_1a_2a_3\cdots a_n-b_n$．

(1)若数列$\{a_n\}$的“泛差”$d=1$，且 a_1，a_2，a_3 成等差数列，求 a_1；

(2)若数列$\{a_n\}$的“泛差”$d=-1$，且 $a_1=\frac{1}{2}$，求数列$\{b_n\}$的通项 b_n．

解：(1)泛差 $d=1$，所以 $a_2=a_1+1$，$a_3=a_1a_2+1$，又 a_1，a_2，a_3 成等差数列，所以 $a_1+a_3=2a_2$，即 $a_1+(a_1a_2+1)=2(a_1+1)$，得 $a_1{}^2=1$，所以 $a_1=-1$ 或 $a_1=1$．

(2)泛差 $d=-1$，$a_1=\frac{1}{2}$，所以 $b_n=a_1a_2a_3\cdots a_n-(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)$，

所以 $b_{n+1}=a_1a_2a_3\cdots a_n\ a_{n+1}-(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+a_{n+1}^2)=a_{n+2}+1-(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+a_{n+1}^2)$，

相减得 $b_{n+1}-b_n=a_{n+2}-a_{n+1}-(a_{n+1})^2=a_{n+2}-a_{n+1}(1+a_{n+1})=a_{n+2}-a_{n+1}a_1a_2a_3\cdots a_n=-1$，

所以$\{b_n\}$为等差数列，首项为$\frac{1}{4}$，公差为 1，

所以 $b_n=\frac{5}{4}-n$.

18.（本小题满分 12 分）

在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，$2c=b(\sin A-\cos A)$.

(1)若 $\sin B=10\sin C$，求 $\sin A$ 的值；

(2)在下列条件中选择一个，判断△ABC 是否存在．如果存在，求 b 的最小值；如果不存在，说明理由．

①△ABC 的面积 $S=\sqrt{2}+1$；②$bc=4\sqrt{2}$；③$a^2+b^2=c^2$.

解：(1)由正弦定理及 $\sin B=10\sin C$ 得 $b=10c$，

代入 $2c=b(\sin A-\cos A)$得 $\sin A-\cos A=\frac{1}{5}$，

又 $\sin^2A+\cos^2A=1$，所以 $\sin A=\frac{4}{5}$或 $\sin A=-\frac{3}{5}$，又 $\sin A>0$，

故 $\sin A=\frac{4}{5}$.

(2)选①，因为 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{2}+1$，所以 $bc\sin A=2(\sqrt{2}+1)$，

所以 $2bc\sin A=4(\sqrt{2}+1)$.

因为 $2c=b(\sin A-\cos A)$，所以 $b^2(\sin A-\cos A)\sin A=4(\sqrt{2}+1)$，

所以 $b^2=\frac{4(\sqrt{2}+1)}{(\sin A-\cos A)\sin A}=\frac{8(\sqrt{2}+1)}{2\sin^2A-2\sin A\cos A}=\frac{8(\sqrt{2}+1)}{1-\cos 2A-\sin 2A}$

$=\frac{8(\sqrt{2}+1)}{1-\sqrt{2}(\sin(2A+\frac{\pi}{4}))}$.

因为 $2c=b(\sin A-\cos A)>0$，所以$\frac{\pi}{4}<A<\pi$，

所以当 $2A+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$，即 $A=\frac{5\pi}{8}$时，$(b^2)_{\min}=8$，$b_{\min}=2\sqrt{2}$.

此时 $A=\frac{5\pi}{8}$，$b=2\sqrt{2}$，$c=\sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{8}$，△$ABC$ 存在．

选②，因为 $2c=b(\sin A-\cos A)$，$bc=4\sqrt{2}$，

所以 $b^2(\sin A-\cos A)=8\sqrt{2}$，

$b^2=\frac{8\sqrt{2}}{\sin A-\cos A}=\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sin(A-\frac{\pi}{4})}$.

因为 $2c=b(\sin A-\cos A)>0$，所以$\frac{\pi}{4}<A<\pi$，

当 $A-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即 $A=\frac{3\pi}{4}$时，$(b^2)_{\min}=8$，$b_{\min}=2\sqrt{2}$.

此时 $A=\frac{3\pi}{4}$，$b=2\sqrt{2}$，$c=2$，$\triangle ABC$ 存在.

选③，则 C 为直角，A，B 互余.

由 $2c=b(\sin A-\cos A)$，

$2\sin C=\sin B(\sin A-\cos A)=\cos A(\sin A-\cos A)=\frac{1}{2}(\sin 2A-1-\cos 2A)$，

所以 $5=\sqrt{2}\sin(2A-\frac{\pi}{4})\leqslant\sqrt{2}$，矛盾，故这样的$\triangle ABC$ 不存在.

19.（本小题满分 12 分）

如图，在多面体 $ABCDE$ 中，平面 $ACD\perp$平面 ABC，$BE\perp$平面 ABC，$\triangle ABC$ 和$\triangle ACD$ 均为正三角形，$AC=4$，$BE=\sqrt{3}$.

(1)在线段 AC 上是否存在点 F，使得 $BF\parallel$平面 ADE？说明理由；

(2)求平面 CDE 与平面 ABC 所成的锐二面角的正切值.

(1)记 AC 中点为 M，连结 AM，则 $AM\perp AC$，且 $AM=2\sqrt{3}$，

因为平面 $ACD\perp$平面 ABC，平面 $ACD\cap$平面 $ABC=AC$，AM$\subset$平面 ACD，

所以 $AM\perp$平面 ABC，又因为 $BE\perp$平面 ABC，

所以 $AM\parallel BE$.

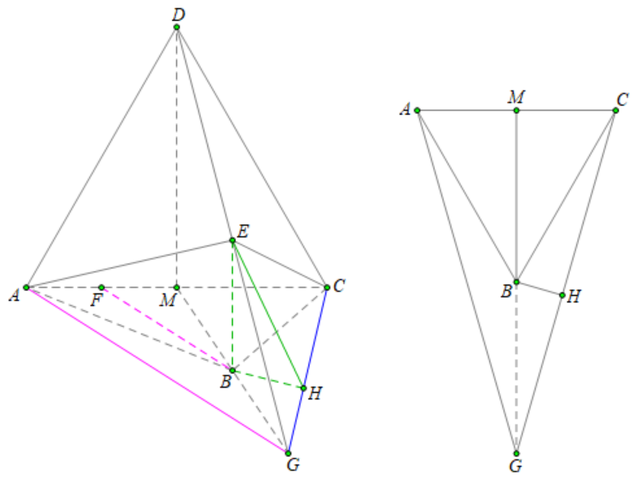
延长 MB、DE 交于点 G，则 AG 为平面 ADE 与平面 ABC 的交线，

因为 $DM=2BE$，所以 B 为 MG 的中点，

取 AM 中点 F，连结 BF，则 $BF\parallel AG$，因为 $AG\subset$平面 ADE，$BF\not\subset$平面 ADE，

所以 $BF\parallel$平面 ADE.

当$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$时，$BF\parallel$平面 ADE.



(2)连结 CG，则 CG 为平面 CDE 与平面 ABC 的交线，

在平面 ABC 内，过点 B 作 CG 的垂线，垂足为 H，

连结 EH，则 $\angle BHE$ 为平面 CDE 与平面 ABC 所称的二面角的平面角.

因为 $MB=\sqrt{3}$，$BH=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$，

所以 $\tan\angle BHE=\dfrac{MB}{BH}=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$，

即平面 CDE 与平面 ABC 所成的锐二面角的正切值为$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

20.（本小题满分 12 分）

人工智能是研究用于模拟和延伸人类智能的技术科学，被认为是 21 世纪最重要的尖端科技之一，其理论和技术正在日益成熟，应用领域也在不断扩大．人工智能背后的一个基本原理：首先确定先验概率，然后通过计算得到后验概率，使先验概率得到修正和校对，再根据后验概率做出推理和决策.

基于这一基本原理，我们可以设计如下试验模型：有完全相同的甲、乙两个袋子，袋子有形状和大小完全相同的小球，其中甲袋中有 9 个红球和 1 个白球；乙袋中有 2 个红球和 8 个白球．从这两个袋子中选择一个袋子，再从该袋子中等可能摸出一个球，称为一次试验．若多次试验直到摸出红球，则试验结束．假设首次试验选到甲袋或乙袋的概率均为$\frac{1}{2}$（先验概率）.

(1)求首次试验结束的概率；

(2)在首次试验摸出白球的条件下，我们对选到甲袋或乙袋的概率（先验概率）进行调整.

①求选到的袋子为甲袋的概率；

②将首次试验摸出的白球放回原来袋子，继续进行第二次试验时有如下两种方案：方案

一，从原来袋子中摸球；方案二，从另外一个袋子中摸球．

请通过计算，说明选择哪个方案第二次试验结束的概率更大．

解：设试验一次，“取到甲袋”为事件 A_1，“取到乙袋”为事件 A_2，“试验结果为红球”为事件 B_1，“试验结果为白球”为事件 B_2，

(1) $P(B_1)=P(A_1)P(B_1|A_1)+P(A_2)P(B_1|A_2)=\frac{1}{2}\times\frac{9}{10}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{10}=\frac{11}{20}$.

答：试验一次结果为红球的概率为$\frac{11}{20}$.

(2)①因为 B_1，B_2 是对立事件，$P(B_2)=1-P(B_1)=\frac{9}{20}$，

所以 $P(A_1|B_2)=\frac{P(A_1B_2)}{P(B_2)}=\frac{P(B_2|A_1)P(A_1)}{P(B_2)}=\frac{\frac{1}{10}\times\frac{1}{2}}{\frac{9}{20}}=\frac{1}{9}$，

答：求此白球来自于甲袋的概率为$\frac{1}{9}$.

②由①得 $P(A_2|B_2)=1-P(A_1|B_2)=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$，

所以方案一中取到红球的概率为：

$P_1=P(A_1|B_2)\,P(B_1|A_1)+P(A_2|B_2)\,P(B_1|A_2)\;=\frac{1}{9}\times\frac{9}{10}+\frac{8}{9}\times\frac{2}{10}=\frac{5}{18}$，

方案二中取到红球的概率为：

$P_2=P(A_2|B_2)\,P(B_1|A_1)+P(A_1|B_2)\,P(B_1|A_2)=\frac{8}{9}\times\frac{9}{10}+\frac{1}{9}\times\frac{2}{10}=\frac{37}{45}$，

因为$\frac{37}{45}>\frac{5}{18}$，所以方案二中取到红球的概率更大．

21．（本小题满分 12 分）

已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a，b>0)$的离心率为$\sqrt{2}$，直线 l_1：$y=2x+4\sqrt{3}$与双曲线 C 仅有一个公共点．

(1)求双曲线 C 的方程；

(2)设双曲线 C 的左顶点为 A，直线 l_2 平行于 l_1，且交双曲线 C 于 M，N 两点，求证：$\triangle AMN$ 的垂心在双曲线 C 上．

解：因为双曲线 C 的离心率为$\sqrt{2}$，所以$\frac{a^2+b^2}{a^2}=2$，即 $a^2=b^2$，

所以双曲线 C 的方程为 $x^2-y^2=a^2$，

将直线 l_1 的方程 $y=2x+4\sqrt{3}$，

代入 C 方程，消去 y 得 $x^2-(2x+4\sqrt{3})^2=a^2$，

即$(\sqrt{3}x)^2+16(\sqrt{3}x)+a^2+48=0$，

因为 l_1 与双曲线 C 仅有一个公共点，

所以 $\Delta=16^2-4(a^2+48)=0$，

解得 $a^2=16$，

故双曲线 C 的方程为$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{16}=1$.

(2)$M(x_1,\ y_1)$，$N(x_2,\ y_2)$满足$\begin{cases}y=2x+m,\\x^2-y^2=16,\end{cases}$

消去 y 得 $3x^2+4mx+m^2+16=0$，

所以 $x_1+x_2=-\frac{4}{3}m$，$x_1x_2=\frac{m^2+16}{3}$，

过 A 引 BC 的垂线交 C 于另一点 H，则 AH 的方程为 $y=-\frac{1}{2}x-2$，

代入 $x^2-y^2=16$ 得 $3x^2-8x-80=0$，解得 $x=-4$ 或 $x=\frac{20}{3}$，

所以点 H 的坐标为$\left(\frac{20}{3},\ -\frac{16}{3}\right)$.

$$k_{AN}k_{MH}=\frac{y_2}{x_2+4}\cdot\frac{y_1+\frac{16}{3}}{x_1-\frac{20}{3}}=\frac{3(2x_1+m)(2x_2+m)+16(2x_2+m)}{(3x_1-20)(x_2+4)}$$

$$=\frac{12x_1x_2+6m(x_1+x_2)+32x_2+3m^2+16m}{3x_1x_2+12(x_1+x_2)-32x_2-80}=\frac{4(m^2+16)-8m^2+3m^2+16m+32x_2}{m^2+16-16m-32x_2-80}=-1,$$

所以 $MH\perp AN$，

故 H 为三角形 AMN 的垂心.

22.（本小题满分 12 分）

已知 $k\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=3\ln(x+1)+\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}+kx$，$x\in(-1,\ 2)$.

(1)若 $k=0$，求证：$f(x)$仅有 1 个零点；

(2)若 $f(x)$有两个零点，求实数 k 的取值范围.

解：(1)$k=0$ 时，$f(x)=3\ln(x+1)+\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}$，

$x\in(-1,\ 2)$时，$f'(x)=\frac{3}{x+1}+\cos\frac{\pi x}{2}>1+\cos\frac{\pi x}{2}>0$，

所以 $f(x)$在$(-1,\ 2)$上单调递增，且 $f(0)=0$，

所以 $f(x)$仅有 1 个零点 0.

(2)$f'(x)=\frac{3}{x+1}+\cos\frac{\pi x}{2}+k$，

当 $k\geqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(-1,2)$上单调递增，$f(x)$仅有 1 个零点 0.

当 $k=-4$ 时，$f'(x)=\dfrac{3}{x+1}+\cos\dfrac{\pi x}{2}-4$，

当 $x\in(-1,0)$时，$f''(x)=\dfrac{-3}{(x+1)^2}-\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi x}{2}<-3-\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi x}{2}<0$，

所以 $f'(x)$在$(-1,0)$上单调递减，所以 $f'(x)>f'(0)=0$，所以 $f(x)$在$(-1,0)$上单调递增，

$x\in(0,2)$时，$f'(x)=\dfrac{3}{x+1}+\cos\dfrac{\pi x}{2}-4<0$，所以 $f(x)$在$(0,2)$上单调递减，

此时 $f(x)$只有一个零点 0.

当 $k\in(-4,0)$时，$f'(x)=\dfrac{3}{x+1}+\cos\dfrac{\pi x}{2}+k$，

由上知 $f(x)$在$(-1,0)$上单调增，

$f'(x)$在$(0,2)$上单调减，$f'(0)=4-k>0$，$f'(2)=k<0$，

所以存在 $x_0\in(0,2)$，使得 $f'(x_0)=0$，

$f(x)$在$(0,x_0)$上单调递增，在$(x_0,2)$上单调递减，

所以 $f(x_0)>f(0)=0$，$f(2)=3\ln3+2k$，

要使 $f(x)$有 2 个零点，则 $f(2)=3\ln3+2k<0$，所以 $k<-\dfrac{3}{2}\ln3$.

此时 $k\in(-4,-\dfrac{3}{2}\ln3)$；

当 $k\in(-\infty,-4)$时，由上知 $f(x)$在$(0,2)$上单调减，

$f'(x)=\dfrac{3}{x+1}+\cos\dfrac{\pi x}{2}+k$，且 $f'(x)$在$(-1,0)$上单调递减，$f'(0)=4+k<0$，

$x\in(-1,0)$时，$f'(x)=\dfrac{3}{x+1}+\cos\dfrac{\pi x}{2}+k>\dfrac{3}{x+1}+k$，则 $f'(-1-\dfrac{3}{k})>0$，

所以存在 $x_1\in(-1-\dfrac{3}{k},0)$使得 $f'(x_1)=0$，

所以 $f(x)$在$(-1,x_1)$上单调增，在$(x_1,0)$上单调减，

所以 $f(x_1)>f(0)=0$，

$x\in(-1,0)$时，$f(x)=3\ln(x+1)+\dfrac{2}{\pi}\sin\dfrac{\pi x}{2}+kx<3\ln(x+1)-k$，

所以 $f(-1+e^{\frac{k}{3}})<0$，

所以 $f(x)$在$(-1+e^{\frac{k}{3}},x_1)$上有 1 个零点，此时 $f(x)$有两个零点.

综上，k 的取值范围为$(-\infty,-4)\cup(-4,-\dfrac{3}{2}\ln3)$.