苏州市 2022～2023 学年第一学期学业质量阳光指标调研卷

高三数学

注意事项

学生在答题前请认真阅读本注意事项及各题答题要求：

1．本卷共 6 页，包含单项选择题（第 1 题~第 8 题）、多项选择题（第 9 题~第 12 题）、填空题（第 13 题~第 16 题）、解答题（第 17 题~第 22 题）．本卷满分 150 分，答题时间为 120 分钟，答题结束后，请将答题卡交回．

2、答题前，请您务必将自己的姓名、调研序列号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在答题卡的规定位置．

3．请在答题卡上按照顺序在对应的答题区域内作答，在其他位置作答一律无效．作答必须 0.5 毫米黑色墨水的签字笔．请注意字体工整，笔迹清楚．

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|x^2-2x<0,x\in\mathbf{Z}\}$， $B=\{0,b\}$，若 $A\cap B\neq\varnothing$，则实数 b 的值为（　　）

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

【答案】C

【解析】

【分析】求出集合 A，根据 $A\cap B\neq\varnothing$，可得答案.

【详解】化简 A 得，$A=\{x|x(x-2)<0,x\in\mathbf{Z}\}=\{x|0<x<2,x\in\mathbf{Z}\}=\{1\}$，由 $B=\{0,b\}$，且 $A\cap B\neq\varnothing$，故 $b=1$.

故选：C

2. 已知 $\dfrac{\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=x-y\mathrm{i}$（$x,y\in\mathbf{R}$，i 为虚数单位），则 $\sqrt{x^2+y^2}=$（　　）

A. $\dfrac{1}{5}$　　B. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{5}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据 $\dfrac{\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=x-y\mathrm{i}$（$x,y\in\mathbf{R}$，i 为虚数单位），利用复数相等求得 x,y，代入 $\sqrt{x^2+y^2}$ 求解.

【详解】解：因为 $\dfrac{\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=x-y\mathrm{i}$（$x,y\in\mathbf{R}$，i 为虚数单位），

所以 $x-y\mathrm{i}=\dfrac{\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{i}(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}\mathrm{i}$,

所以 $x=-\dfrac{1}{5}, y=\dfrac{2}{5}$,

所以 $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(-\dfrac{1}{5}\right)^2+\left(\dfrac{2}{5}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,

故选：B

3. 设 $a=\sqrt{\pi}$，$b=\dfrac{5}{2}$，$c=\log_2 6$，则（　　）

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$　　C. $b<c<a$　　D. $c<a<b$

【答案】A

【解析】

【分析】根据幂函数以及对数函数的单调性，结合关键无理数的估计值，可得答案.

【详解】$b=\dfrac{5}{2}=2+\dfrac{1}{2}\log_2 2=2+\log_2\sqrt{2}$,

$c=\log_2 6=\log_2\left(4\times\dfrac{3}{2}\right)=\log_2 4+\log_2\dfrac{3}{2}=2+\log_2\dfrac{3}{2}$,

由 $\sqrt{\pi}<\sqrt{4}=2<\dfrac{5}{2}=2+\log_2\sqrt{2}<2+\log_2\dfrac{3}{2}$，则 $a<b<c$,

故选：A.

4. 已知通过某种圆筒型保温层的热流量 $\varPhi=\dfrac{2\pi\lambda l(t_1-t_2)}{\ln r_2-\ln r_1}$，其中 r_1，r_2 分别为保温层的内外半径（单位：mm），t_1，t_2 分别为保温层内外表面的温度（单位：℃），l 为保温层的长度（单位：m），λ 为保温层的导热系数（单位：$\mathrm{W/(m\cdot ℃)}$）. 某电厂为了减少热损失，准备在直径为 120 mm、外壁面温度为 250℃的蒸汽管道外表面覆盖这种保温层，根据安全操作规定，保温层外表面温度应控制为 50℃. 经测试，当保温层的厚度为 30 mm 时，每米长管道的热损失 $\dfrac{\varPhi}{l}$ 为 300 W. 若要使每米长管道的热损失 $\dfrac{\varPhi}{l}$ 不超过 150 W，则覆盖的保温层厚度至少为（　　）

A. 60 mm　　B. 65 mm　　C. 70 mm　　D. 75 mm

【答案】D

【解析】

【分析】由已知 $\dfrac{\varPhi}{l}$ 求得 $2\pi\lambda$，然后代入不等式 $\dfrac{2\pi\lambda(250-50)}{\ln(60+d)-\ln 60}\le 150$ 求得 d 的范围即可.

【详解】由题意可得$\frac{\Phi}{l}=\frac{2\pi\lambda\left(t_1-t_2\right)}{\ln r_2-\ln r_1}$，

$\frac{2\pi\lambda(250-50)}{\ln 90-\ln 60}=300$，$2\pi\lambda=\frac{3}{2}\ln\frac{3}{2}$，

设覆盖的保温层厚度至少为$d(\mathrm{mm}), d>0$，

则$\frac{2\pi\lambda(250-50)}{\ln(60+d)-\ln 60}\le 150$，$\frac{\frac{3}{2}\ln\frac{3}{2}}{\ln(60+d)-\ln 60}\le\frac{3}{4}$，

整理可得$\ln\frac{9}{4}\le\ln\frac{60+d}{60}$，即$\frac{9}{4}\le\frac{60+d}{60}$，解得$d\ge 75$，

故选：D.

5. 若$\left(\frac{a}{x}+bx\right)^6$的展开式中$x^2$的系数为60，则$a^2+b^2$的最小值为（　　）

A. 2　　B. $\sqrt{2}+1$　　C. 3　　D. 5

【答案】C

【解析】

【分析】由二项式定理求得a,b的关系,然后由均值不等式求得最小值.

【详解】$T_{r+1}=C_6^r(\frac{a}{x})^{6-r}(bx)^r=a^{6-r}b^rC_6^rx^{2r-6}$，令$2r-6=2$，$r=4$，

所以$C_6^4a^2b^4=60$，$\therefore a^2b^4=4$，

$a^2+b^2=\frac{4}{b^4}+b^2=\frac{4}{b^4}+\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}b^2\ge 3\sqrt[3]{\frac{4}{b^4}\cdot\frac{1}{2}b^2\cdot\frac{1}{2}b^2}=3$，当且仅当$\frac{4}{b^4}=\frac{1}{2}b^2$，即$b=\pm\sqrt{2}$时等号成立，

故选：C.

6. 在平面直角坐标系xOy中，已知双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左顶点为A，右焦点为$F$，过点$F$作$C$的一条渐近线的垂线，垂足为$P$，过点$P$作$x$轴的垂线，垂足为$Q$. 若$|OQ|$，$|QF|$，$|OA|$成等差数列，则$C$的离心率为（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$

【答案】B

【解析】

【分析】不妨设渐近线方程为 $y=\frac{b}{a}x$，计算 P 点坐标得到 $|OQ|=\frac{a^2}{c}$，$|QF|=c-\frac{a^2}{c}$，$|OA|=a$，根据等差数列性质得到 $2e=1+\frac{3}{e}$，解得答案.

【详解】$A(-a,0)$，$F(c,0)$，不妨设渐近线方程为 $y=\frac{b}{a}x$，则直线 PF 为：$y=-\frac{a}{b}(x-c)$，

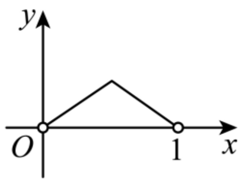
$\begin{cases} y=\frac{b}{a}x \\ y=-\frac{a}{b}(x-c) \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x=\frac{a^2}{c} \\ y=\frac{ab}{c} \end{cases}$，故 $|OQ|=\frac{a^2}{c}$，$|QF|=c-\frac{a^2}{c}$，$|OA|=a$，

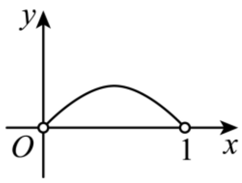
$|OQ|$，$|QF|$，$|OA|$ 成等差数列，故 $2\left(c-\frac{a^2}{c}\right)=a+\frac{a^2}{c}$，整理得到 $2e=1+\frac{3}{e}$，

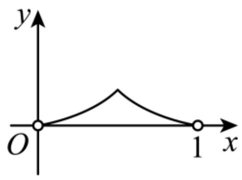
解得 $e=\frac{3}{2}$ 或 $e=-1$（舍）.

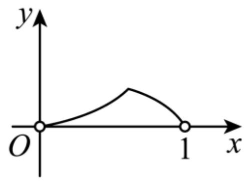
故选：B

7. 已知正四面体 $ABCD$ 的棱长为 1，P 为棱 AB 上的动点（端点 A、B 除外），过点 P 作平面 α 垂直于 AB，α 与正四面体的表面相交．记 $AP=x$，将交线围成的图形面积 S 表示为 x 的函数 $f(x)$，则 $S=f(x)$ 的图象大致为（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】C

【解析】

【分析】取线段 AB 的中点 O，连接 OC、OD，证明出 $AB\perp$ 平面 OCD，分析可知平面 α 与平面 OCD 平行或重合，分 $0<x<\frac{1}{2}$、$x=\frac{1}{2}$、$\frac{1}{2}<x<1$ 三种情况讨论，计算出 $\triangle OCD$ 的面积，利用三角形相似可得出 $f(x)$ 的表达式，即可得出合适的选项.

【详解】取线段 AB 的中点 O，连接 OC、OD，

因为 $\triangle ABC$、$\triangle ABD$ 为等边三角形，O 为 AB 的中点，则 $OC\perp AB$，$OD\perp AB$，

$\because OC\cap OD=O$，OC、$OD\subset$平面OCD，$\therefore AB\perp$平面OCD，

因为$AB\perp$平面α，所以，平面α与平面OCD平行或重合，

且$OD=OC=\sqrt{AC^2-OA^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

取CD的中点M，连接OM，则$OM\perp CD$，

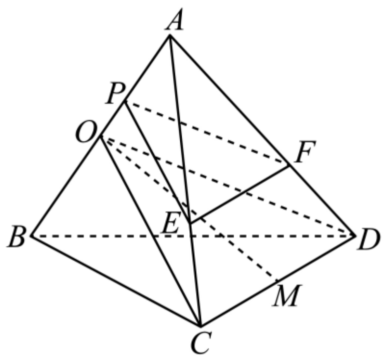
且$OM=\sqrt{OC^2-CM^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故$S_{\triangle OCD}=\dfrac{1}{2}CD\cdot OM=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

①当$0<x<\dfrac{1}{2}$时，平面$\alpha//$平面OCD，平面$\alpha\cap$平面$ABC=PE$，

平面$OCD\cap$平面$ABC=OC$，$\therefore PE//OC$，同理可知，$PF//OD$，$EF//CD$，

所以，$\dfrac{PE}{OC}=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{EF}{CD}=\dfrac{AF}{AD}=\dfrac{PF}{OD}$，故$\triangle PEF\backsim\triangle OCD$，

如下图所示：



则$\dfrac{S}{S_{\triangle OCD}}=\left(\dfrac{AP}{AO}\right)^2=4x^2$，则$S=f\left(x\right)=\sqrt{2}x^2$；

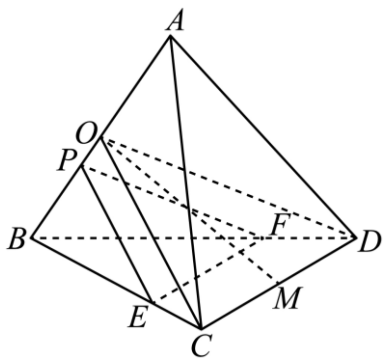
②当$x=\dfrac{1}{2}$时，$S=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$；

③当$\dfrac{1}{2}<x<1$时，平面$\alpha//$平面OCD，平面$\alpha\cap$平面$ABC=PE$，

平面$OCD\cap$平面$ABC=OC$，$\therefore PE//OC$，同理可知，$PF//OD$，$EF//CD$，

所以，$\dfrac{PE}{OC}=\dfrac{BE}{BC}=\dfrac{EF}{CD}=\dfrac{BF}{BD}=\dfrac{PF}{OD}$，故$\triangle PEF\backsim\triangle OCD$，

如下图所示：



则 $\dfrac{S}{S_{\triangle OCD}}=\left(\dfrac{BP}{BO}\right)^2=4(1-x)^2$，则 $S=f(x)=\sqrt{2}(1-x)^2$.

综上所述，$S=f(x)=\begin{cases}\sqrt{2}x^2,0<x\le\dfrac{1}{2}\\ \sqrt{2}(x-1)^2,\dfrac{1}{2}<x<1\end{cases}$，故函数 $f(x)$ 的图象如 C 选项中的图象.

故选：C.

【点睛】关键点点睛：本题考查函数图象的识别，解题的关键对 x 分类讨论，求出函数 $f(x)$ 的解析式，进而辨别出函数 $f(x)$ 的图象.

8. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x+1)$ 为奇函数，$f(x+2)$ 为偶函数.记函数 $g(x)=2f(2x+1)+1$，则 $\sum_{k=1}^{31}g\left(\dfrac{k}{2}\right)=$（　　）

A. 25　　B. 27　　C. 29　　D. 31

【答案】D

【解析】

【分析】由已知条件得函数 $f(x)$ 的图象点 $(1,0)$ 对称也关于直线 $x=2$ 对称，由此求得其是周期函数，周期是 4，由中心对称得 $f(2)+f(4)=0$，然后求得 $f(2)+f(3)+f(4)+f(5)=0$，代入计算可得.

【详解】$f(x+1)$ 为奇函数，$f(x+1)$ 是由 $f(x)$ 向左平移 1 个单位得到，

则 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，所以 $f(2-x)=-f(x)$，$f(1)=0$，

$f(x+2)$ 为偶函数，$f(x+2)$ 是由 $f(x)$ 向左平移 2 个单位得到，

则 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，所以 $f(2-x)=f(2+x)$，则 $f(3)=0$，

所以 $f(x+2)=-f(x)$，从而 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，

$f(x)$是周期函数，且周期为4，所以 $f(2k-1)=0, k\in Z$，

因为$f(x)$的图象关于直线$x=2$对称，也关于点$(1,0)$对称，

所以$f(x)$的图象关于点$(3,0)$对称，所以 $f(2)+f(4)=0$，

所以 $f(2)+f(3)+f(4)+f(5)=0$，

所以$\sum_{k=1}^{31} f(k+1)=7[f(2)+f(3)+f(4)+f(5)]+[f(2)+f(3)+f(4)]=0$

因为$g(\frac{k}{2})=2f(k+1)+1$，$k\in Z$，

所以$\sum_{k=1}^{31} g\left(\frac{k}{2}\right)=2\sum_{k=1}^{31} f(k+1)+31=31$，

故选：D.

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9. 已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为60°，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，则与向量$\vec{a}-\vec{b}$的夹角为锐角的向量有（　　）

A. $\vec{b}$　　　　B. $\vec{a}+\vec{b}$　　　　C. $\vec{a}-2\vec{b}$　　　　D. $\vec{b}-2\vec{a}$

【答案】BC

【解析】

【分析】显然不可能平行，因此只要计算出数量积　正即可.

【详解】由已知各选项中向量与向量$\vec{a}-\vec{b}$不平行，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times1\times\cos 60°=1$，

$(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}^2=1-1=0$，

$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{b}^2=4-1=3>0$，

$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=\vec{a}^2-3\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}^2=4-3\times1+2\times1=3>0$，

$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{b}-2\vec{a})=-2\vec{a}^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}^2=-2\times4+3\times1-1=-6<0$，

只有BC选项符合题意.

故选：BC.

10. 已知函数 $f(x)=\sin x+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+x$，则（　　）

A. $f(x)$ 的周期为 2π

B. 直线 $y=\frac{3}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线

C. $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增

D. 点 $\left(-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{3}\right)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的对称中心

【答案】BCD

【解析】

【分析】判断 $f(x+2\pi), f(x)$ 是否相等即可判断 A；根据导数的几何意义即可判断 B；利用导数计算即可判断 C；构造函数 $g(x)=f\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}$，再判断函数 $g(x)$ 的奇偶性即可判断 D.

【详解】解：对于 A，因为 $f(x+2\pi)=\sin x+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+x+2\pi\neq f(x)$，

所以 2π 不是函数 $f(x)$ 的周期，故 A 错误；

对于 B，$f(x)=\sin x+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+x=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+x$，

设切点为 $\left(x_0, f(x_0)\right)$，

$f'(x)=-\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+1$，

令 $f'(x_0)=\frac{3}{2}$，则 $\sin\left(x_0-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$，

可取 $x_0=0$，则 $f(0)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以过点 $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 的切线方程为 $y=\frac{3}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以直线 $y=\frac{3}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线，故 B 正确；

对于 C，$f'(x)=-\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+1$，

因为$-\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\in[-1,1]$，所以$f'(x)=-\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+1\geq 0$，

所以$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增，故C正确；

对于D，令$g(x)=f\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+x=\sin x+x$，

因为$g(-x)=-\sin x-x=-g(x)$，

所以函数$g(x)$是奇函数，关于原点对称，

又因函数$g(x)$是由函数$f(x)$先向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位，再向上平移$\frac{\pi}{3}$个单位所得的，

所以函数点$\left(-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{3}\right)$是曲线$y=f(x)$的对称中心，故D正确.

故选：BCD.

11. 已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为1，$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BD_1}$，$\overrightarrow{CQ}=\mu\overrightarrow{CC_1}$，其中$\lambda\in[0,1]$，$\mu\in[0,1]$，则下列说法中正确的有（　　）

A. 若$PQ\subset$平面AB_1C，则$\lambda+\mu=\frac{1}{3}$

B. 若$PQ//$平面$ABCD$，则$\lambda=\mu=\frac{1}{2}$

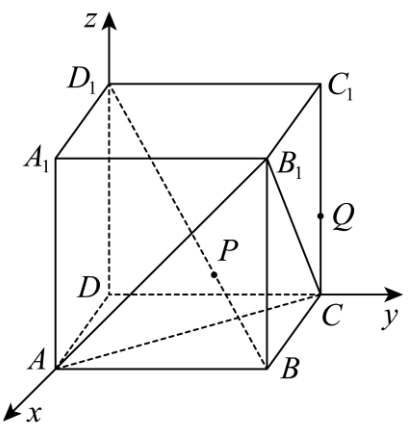
C. 存在λ，μ，使得$|PQ|=\frac{3}{5}$

D. 存在λ，使得对于任意　μ，都有$PQ\perp BD$

【答案】AD

【解析】

【分析】建立空间直角坐标系，利用坐标表示向量，根据共面向量定理可判断选项A，利用直线方向向量和面法向量垂直可判断线面平行，可判断选项B，通过向量求得模长，根据条件判断方程是否有解，可判断C，向量数量积为0，可判断D.

【详解】


以D为原点，DA,DC,DD_1所在直线为x,y,z建立空间直角坐标系.

因为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1，

$\overrightarrow{BD_1}=(-1,-1,1)$

$\because Q\in CC_1,\overrightarrow{CQ}=\mu\overrightarrow{CC_1},PQ\subset$ 面 $AB_1C,\therefore Q$ 为 C 点，$\therefore \mu=0$.

设 $\overrightarrow{DP}=x\overrightarrow{DA}+y\overrightarrow{DB_1}+z\overrightarrow{DC}=x(1,0,0)+y(1,1,1)+z(0,1,0)=(x+y,y+z,y)$，

又 $\because \overrightarrow{DP}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BP}=(1,1,0)+\lambda\overrightarrow{BD_1}=(1,1,0)+(-\lambda,-\lambda,\lambda)=(1-\lambda,1-\lambda,\lambda)$，

$\therefore\begin{cases}x+y=1-\lambda\\y+z=1-\lambda\\y=\lambda\end{cases}\therefore x=1-2\lambda,y=\lambda,z=1-2\lambda,$

又因为点 $P\in$ 面 $AB_1C,\therefore x+y+z=1\therefore \lambda=\dfrac{1}{3}$，

所以若 $PQ\subset$ 平面 AB_1C，则 $\lambda+\mu=\dfrac{1}{3}$，故 A 正确.

面 $ABCD$ 的法向量 $\vec{m}=(0,0,1)$，

$\because \overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BD_1}=(-\lambda,-\lambda,\lambda),B(1,1,0)$，

$\therefore P(1-\lambda,1-\lambda,\lambda),$

$\overrightarrow{CQ}=\mu\overrightarrow{CC_1}=(0,0,\mu),C(0,1,0)$，

$\therefore Q(0,1,\mu)$，

$\therefore \overrightarrow{PQ}=(\lambda-1,\lambda,\mu-\lambda)$

$\because PQ//$ 平面 $ABCD,\therefore \overrightarrow{PQ}\perp\vec{m}$，

$\therefore \mu-\lambda=0$，$\mu=\lambda$，故 B 错误.

$\because \overrightarrow{PQ}^2=(\lambda-1)^2+\lambda^2+(\mu-\lambda)^2=3\lambda^2-2\lambda(\mu+1)+1+\mu^2$，

若 $|PQ|=\dfrac{3}{5},\therefore |PQ|^2=\dfrac{9}{25}\therefore 3\lambda^2-2\lambda(\mu+1)+1+\mu^2=\dfrac{9}{25}$，

$\therefore 3\lambda^2-2\lambda(\mu+1)+\mu^2+\dfrac{16}{25}=0$，

$\because \lambda=\dfrac{1}{3}(\mu+1),\mu\in[0,1],\dfrac{1}{3}(\mu+1)\in\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right],$

令 $g(\lambda)=3\lambda^2-2\lambda(\mu+1)+\mu^2+\dfrac{16}{25}$，

易得 $g(0)>0, g(1)>0$，

$$g(\frac{1}{3}(\mu+1))=3\times\frac{1}{9}(\mu+1)^2-2(\mu+1)\frac{1}{3}(\mu+1)+\mu^2+\frac{16}{25},$$

$$=\frac{2\mu^2}{3}-\frac{2\mu}{3}+\frac{23}{75}=\frac{2}{3}(\mu-\frac{1}{2})^2+\frac{23}{75}-\frac{1}{6}>0,$$

$\therefore g(\lambda)=0$ 在 $\lambda\in[0,1]$ 无解，故 C 错误.

$\because \overrightarrow{PQ}=(\lambda-1,\lambda,\mu-\lambda)$，$\overrightarrow{BD}=(1,1,0)$，

$\because \overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{BD}=0, \therefore \lambda=\frac{1}{2}$,故 D 正确.

故选：AD

12. 中国蹴鞠已有两千三百多年的历史，于 2004 年被国际足联正式确认为世界足球运动的起源. 蹴鞠在 2022 年卡塔尔世界杯上再次成为文化交流的媒介，走到世界舞台的中央，诉说中国传统非遗故事. 为弘扬中华传统文化，我市四所高中各自组建了蹴鞠队（分别记为“甲队”“乙队”“丙队”“丁队”）进行单循环比赛（即每支球队都要跟其他各支球队进行一场比赛），最后按各队的积分排列名次（积分多者名次靠前，积分同者名次并列），积分规则为每队胜一场得 3 分，平一场得 1 分，负一场得 0 分. 若每场比赛中两队胜、平、负的概率都为 $\frac{1}{3}$，则在比赛结束时（　　）

A. 四支球队的积分总和可能为 15 分

B. 甲队胜 3 场且乙队胜 1 场的概率为 $\frac{2}{3^5}$

C. 可能会出现三支球队积分相同且和第四支球队积分不同的情况

D. 丙队在输了第一场的情况下，其积分仍超过其余三支球队的积分的概率为 $\frac{8}{3^5}$

【答案】ACD

【解析】

【分析】举例比赛的各种得分情况判断 AC，由互斥事件与独立事件的概率公式计算概率判断 BD.

【详解】四支球队共 6 场比赛，例如甲胜乙、丙、丁，而乙、丙、丁之间平，则甲得 9 分，乙、丙、丁各得 2 分，AC 均正确；

每场比赛中两队胜、平、负的概率都为$\frac{1}{3}$，则甲队胜3场且乙队胜1场的概率为$(\frac{1}{3})^3\times C_2^1\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3^5}$，B错；

丙队在输了第一场的情况下，其积分仍超过其余三支球队的积分，

三队中选一队与丙比赛，丙输，$C_3^1\times\frac{1}{3}$，例如是丙甲，

若丙与乙、丁的两场比赛一赢一平，则丙只得4分，这时，甲乙、甲丁两场比赛中甲只能输，否则甲的分数不小于4分，不合题意，在甲输的情况下，乙、丁已有3分，那个它们之间的比赛无论什么情况， 乙、丁中有一人得分不小于4分，不合题意，

若丙全赢（概率是$(\frac{1}{3})^2$）时，丙得6分，其他3人分数最高为5分，这时甲乙，甲丁两场比赛中甲不能赢否则甲的分数不小于6分，只有平或输，

一平一输，概率$C_2^1(\frac{1}{3})^2$，如平乙，输丁，则乙丁比赛时，丁不能赢，概率$\frac{2}{3}$，

两场均平，概率是$(\frac{1}{3})^2$，乙丁这场比赛无论结论如何均符合题意，

两场甲都输，概率是$(\frac{1}{3})^2$，乙丁这场比赛只能平，概率是$\frac{1}{3}$

综上概率为$C_3^1\times\frac{1}{3}\times(\frac{1}{3})^2\times[C_2^1\times(\frac{1}{3})^2\times\frac{2}{3}+(\frac{1}{3})^2+(\frac{1}{3})^2\times\frac{1}{3}]=\frac{8}{3^5}$，D正确.

故选：ACD.

【点睛】难点点睛：本题考查独立的概率与互斥事件的概率公式，难点在于分析丙在输第一场的情况下如何才能使得分超过其他三人，方法是结合列举法对六场比赛结果分步分析，确定每人的得分使之合乎题意.

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 已知圆台的上、下底面半径分别为4和5，高为2，则该圆台的侧面积为________.

【答案】$9\sqrt{5}\pi$

【解析】

【分析】直接利用侧面积公式计算得到答案.

【详解】圆台的侧面积为$S=\pi(R+r)l=\pi(R+r)\cdot\sqrt{(R-r)^2+h^2}=\pi\times9\times\sqrt{5}=9\sqrt{5}\pi$.

故答案为：$9\sqrt{5}\pi$

14. 在平面直角坐标系xOy中，已知圆C：$(x-\sqrt{3})^2+(y-2)^2=4$，过点$M(0,-1)$的直线l交C于A，B两点，且$|MA|=|AB|$，请写出一条满足上述条件的l的方程：________________.

【答案】$x=0$（答案不唯一，$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-1$ 也满足）

【解析】

【分析】分别讨论直线 l 斜率存在、不存在的情况，设 C 到直线的距离为 d，由 $|MA|=|AB|$ 得 $2\sqrt{r^2-d^2}=\sqrt{|MC|^2-d^2}-\sqrt{r^2-d^2}$，结合点线距离公式即可求解判断.

【详解】由题意得 $C\left(\sqrt{3},2\right)$，半径 $r=2$，$|MC|=\sqrt{3+3^2}=2\sqrt{3}>2$，故 $M(0,-1)$ 圆外，

设 C 到直线的距离为 d，

由 $|MA|=|AB|$ 得 $2\sqrt{r^2-d^2}=\sqrt{|MC|^2-d^2}-\sqrt{r^2-d^2}$，即 $2\sqrt{4-d^2}=\sqrt{12-d^2}-\sqrt{4-d^2}$，解得 $d=\sqrt{3}$，

当直线 l 斜率不存在时，即 $x=0$，此时 $d=\sqrt{3}$，符合题意；

当直线 l 斜率存在时，设为 $y=kx-1$，即 $kx-y-1=0$，则 $d=\frac{\left|\sqrt{3}k-2-1\right|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{\left|\sqrt{3}k-3\right|}{\sqrt{k^2+1}}$，即 $\frac{\left(\sqrt{3}k-3\right)^2}{k^2+1}=3$，解得 $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故直线为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-1$.

故答案为：$x=0$（答案不唯一，$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-1$ 也满足）

15. 记函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$（$\omega>0$）的最小正周期为 T，给出下列三个命题：

甲：$T>3$；

乙：$f(x)$ 在区间 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上单调递减；

丙：$f(x)$ 在区间 $(0,3)$ 上恰有三个极值点.

若这三个命题中有且仅有一个假命题，则假命题是________（填"甲"、"已"或"丙"）；ω 的取值范围是________.

【答案】 ①. 甲 ②. $\left(\frac{7\pi}{9},\frac{10\pi}{9}\right]$

【解析】

【分析】甲，利用三角函数的周期性求出 $\omega<\frac{2\pi}{3}$；乙，利用三角函数的单调性求出 $\frac{2\pi}{3}\le\omega\le\frac{4\pi}{3}$；丙，利用函数的极值点定义求出 $\frac{7\pi}{9}<\omega\le\frac{10\pi}{9}$，结合已知可知甲是假命题，进而求解.

【详解】对于甲，$T>3$，即 $\frac{2\pi}{\omega}>3$，解得 $\omega<\frac{2\pi}{3}$；

对于乙，$\because \frac{1}{2}<x<1$，$\therefore \frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{6}<\omega x+\frac{\pi}{6}<\omega+\frac{\pi}{6}$，

由正弦函数的单调性得 $\begin{cases}\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{6}\geq\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ \omega+\frac{\pi}{6}\leq\frac{3\pi}{2}+2k\pi\end{cases}, k\in Z$，解得 $\frac{2\pi}{3}+4k\pi\leq\omega\leq\frac{4\pi}{3}+2k\pi, k\in Z$，

又 $\omega>0$，故 $\frac{2\pi}{3}+4k\pi>0$，又 $k\in Z$，则 $k\geq0$，故 $\omega\geq\frac{2\pi}{3}+4k\pi\geq\frac{2\pi}{3}$，且 $\frac{2\pi}{3}+4k\pi\leq x\leq\frac{4\pi}{3}+4k\pi, k\geq0$，

对于丙，$\because 0<x<3$，$\therefore \frac{\pi}{6}<\omega x+\frac{\pi}{6}<3\omega+\frac{\pi}{6}$，

由正弦函数的极值点得 $\frac{5\pi}{2}<3\omega+\frac{\pi}{6}\leq\frac{7\pi}{2}$，解得 $\frac{7\pi}{9}<\omega\leq\frac{10\pi}{9}$；

由这三个命题中有且仅有一个假命题，

假设乙 假命题，则甲、丙是真命题，但显然甲、丙矛盾，故该假设不成立；

假设丙是假命题，则甲、乙是真命题，但显然甲、乙矛盾，故该假设不成立；

所以假命题是甲，则乙、丙是真命题，取交集 ω 的取值范围是 $\left(\frac{7\pi}{9},\frac{10\pi}{9}\right]$.

故答案为：甲，$\left(\frac{7\pi}{9},\frac{10\pi}{9}\right]$.

16. 若对任意 $m,n\in\mathbf{R}$，关于 x 的不等式 $m-n\leq(x-m)^2+e^{x-n}-a$ 恒成立，则实数 a 的最大值为________.

【答案】$\frac{3}{4}$ ##0.75

【解析】

【分析】不等式化为 $a\leq(x-m)^2+e^{x-n}-m+n=(x-m)^2+(x-m)+e^{x-n}-(x-n)$ 恒成立，由于 m,n,x 都是任意实数，因此不等式右边相当于两个函数相加：$y=(x-m)^2+(x-m)$ 和 $y=e^{x-n}-(x-n)$，后者设 $f(x)=e^x-x$，由导数求得其最小值，前者由二次函数性质得最小值，两者相加即得最小值，从而得 a 的范围，得出结论.

【详解】原不等式化为 $a\leq(x-m)^2+e^{x-n}-m+n=(x-m)^2+(x-m)+e^{x-n}-(x-n)$ 恒成立，

由于 m,n 是任意实数，x 也是任意实数，$\therefore$ $x-m$ 与 $x-n$ 是任意实数，它们之间没有任何影响，

$(x-m)^2+(x-m)=(x-m+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}\geq-\frac{1}{4}$，当且仅当 $x-m=-\frac{1}{2}$ 时等号成立，

设 $f(x)=\mathrm{e}^x-x$，则 $f'(x)=\mathrm{e}^x-1$，

$x<0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，$x>0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

所以 $f(x)_{\min}=f(0)=1$，

所以 $\mathrm{e}^{x-n}-(x-n)$ 的最小值是 1，

所以 $(x-m)^2+(x-m)+\mathrm{e}^{x-n}-(x-n)$ 的最小值是 $-\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4}$，

从而 $a\le\frac{3}{4}$，a 的最大值是 $\frac{3}{4}$．

故答案为：$\frac{3}{4}$．

【点睛】关键点点睛：不等式恒成立求参数范围问题，一般可采用分离参数法转化为求函数的最值，本题分离参数后，关键是对变量的理解，本题中由于 m,n,x 都是任意实数，因此题中 $x-m$ 与 $x-n$ 可以看作是两个不同的变量，因此不等式右边转化为两个函数的和，分别求出其最小值后得出结论．

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 记□ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $b+\sqrt{2}a\cos B=2$，$c=\sqrt{2}$．

（1）求 A；

（2）若 $\tan C=2$，点 D 在边 BC 上，$\angle ADB=2\angle ABC$，求 AD．

【答案】（1）$\frac{\pi}{4}$；

（2）$\sqrt{5}$．

【解析】

【分析】（1）根据给定条件，利用余弦定理求得 $b^2+2-a^2=2b$，再利用余弦定理求解作答.

（2）利用（1）的结论，结合同角公式及和角的余弦公式求出三角函数值，再利用正弦定理求解作答.

【小问 1 详解】

在□ABC 中，由 $b+\sqrt{2}a\cos B=2$，$c=\sqrt{2}$ 得：$ac\cos B=2-b$，由余弦定理得

$a^2+c^2-b^2=2ac\cos B$，

即 $a^2+2-b^2=4-2b$，整理得 $b^2+2-a^2=2b$，由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，

$\cos A=\frac{b^2+2-a^2}{2\sqrt{2}b}=\frac{2b}{2\sqrt{2}b}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，而 $A\in(0,\pi)$，

所以 $A=\frac{\pi}{4}$.

【小问 2 详解】

因为 $\tan C=2$，即 $\sin C=2\cos C>0$，而 $\sin^2 C+\cos^2 C=1$，则 $\sin C=\frac{2\sqrt{5}}{5}$， $\cos C=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

所以 $\cos B=-\cos(A+C)=-(\cos A\cos C-\sin A\sin C)=-(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{5}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2\sqrt{5}}{5})=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

又 $B\in(0,\pi)$，则 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，显然□$ABC$ 是锐角三角形，

由 $\angle ADB=2\angle ABC$，

所以 $\sin\angle ADB=\sin 2B=2\sin B\cos B=\frac{3}{5}$，

所以在□ADB 中，$\frac{AB}{\sin\angle ADB}=\frac{AD}{\sin B}\Rightarrow AD=\sqrt{5}$

18. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_2=2a_1$，$\frac{S_n}{n}=\frac{a_n+1}{2}$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\begin{cases}a_1, & n=1,\\ \frac{a_n}{2n+1}, & n\geq 2,\end{cases}$ 求 $\{b_n\}$ 中的最大项与最小项.

【答案】（1） $a_n=n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$

（2）最大项为 $b_1=1$，最小项为 $b_2=\frac{2}{5}$

【解析】

【分析】（1）两种方法解，方法一：先利用已知条件求出 a_1，然后根据已知条件建立方程，相减后变形构造数列利用递推公式求得数列的通项公式；方法二：利用数列和与项的递推公式构造项和项的递推公式，然后，根据项和项的递推公式进而求得数列的通项公式；

（2）由（1）写出 b_n 的表达式，作差法比较数列的单调性，分析最大项和最小项即可.

【小问 1 详解】

法一：

在 $\frac{S_n}{n}=\frac{a_n+1}{2}$ 中，

令 $n=1$，得 $a_1=1$，

故 $a_2=2a_1=2$，

因为$2S_n=n\left(a_n+1\right)$，①

所以$2S_{n+1}=\left(n+1\right)\left(a_{n+1}+1\right)$，②

②－①，得$2a_{n+1}=(n+1)a_{n+1}-na_n+1$，

即$(n-1)a_{n+1}=na_n-1$，③

当$n\geq 2$时，将③式两边同时除以$n(n-1)$，

得$\frac{a_{n+1}}{n}=\frac{a_n}{n-1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}$，

所以$\frac{a_{n+1}-1}{n}=\frac{a_n-1}{n-1}=\cdots=\frac{a_2-1}{2-1}=1$，

所以当$n\geq 2$时，$a_n=n$，

又因为$a_1=1$，所以$a_n=n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$；

法二：因为$2S_n=n\left(a_n+1\right)$①，

所以$2S_{n+1}=\left(n+1\right)\left(a_{n+1}+1\right)$②

②－①，得$2a_{n+1}=(n+1)a_{n+1}-na_n+1$，

即$(n-1)a_{n+1}=na_n-1$③，

从而$na_{n+2}=(n+1)a_{n+1}-1$④，

④－③得$na_{n+2}-(n-1)a_{n+1}=(n+1)a_{n+1}-na_n$，

即$a_{n+2}+a_n=2a_{n+1}$，

所以$\left\{a_n\right\}$为等差数列.

在$\frac{S_n}{n}=\frac{a_n+1}{2}$中，

令$n=1$，得$a_1=1$，故$a_2=2a_1=2$，

又因为$\left\{a_n\right\}$为等差数列，所以$a_n=n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$；

【小问 2 详解】

由（1）得$b_n=\begin{cases}1,n=1\\ \frac{n}{2n+1},n\geq 2\end{cases}$，

当 $n \geq 2$ 时，

$$b_{n+1}-b_n=\frac{n+1}{2n+3}-\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{(2n+3)(2n+1)}>0,$$

且 $b_n=\dfrac{n}{2n+1}=\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{n}}<\dfrac{1}{2}$，

所以 $b_2<b_3<b_4<\cdots<\dfrac{1}{2}<1=b_1$，

所以 $\{b_n\}$ 中的最大项为 $b_1=1$，最小项为 $b_2=\dfrac{2}{5}$.

19. 新能源汽车作为战略性新兴产业，代表汽车产业的发展方向，发展新能源汽车，对改善能源消费结构、减少空气污染、推动汽车产业和交通运输行业转型升级具有积极意义，经过十多年的精心培育，我国新能源汽车产业取得了显著成绩，产销量连续四年全球第一，保有量居全球首位.

（1）已知某公司生产的新能源汽车电池的使用寿命 ξ（单位：万公里）服从正态分布 $N(60,16)$，问：该公司每月生产的 2 万块电池中，大约有多少块电池的使用寿命可以超过 68 万公里？

参考数据：若随机变量 $\xi \sim N(\mu,\sigma)$，则 $P(\mu-\sigma \leq \xi \leq \mu+\sigma) \approx 0.683$，$P(\mu-2\sigma \leq \xi \leq \mu+2\sigma) \approx 0.955$，$P(\mu-3\sigma \leq \xi \leq \mu+3\sigma) \approx 0.997$.

（2）下表给出了我国 2017~2021 年新能源汽车保有量 y（单位：万辆）的数据.

年份	2017	2018	2019	2020	2021
年份代码 x	1	2	3	4	5
新能源汽车保有量 y	153	260	381	492	784

经计算，变量 x,y 的样本相关系数 $r_1 \approx 0.946$，变量 x^2 与 y 的样本相关系数 $r_2 \approx 0.985$.

①试判断 $y=bx+a$ 与 $y=bx^2+a$ 哪一个更适合作为 y 与 x 之间的回归方程模型？

②根据①的判断结果，求出 y 关于 x 的回归方程（精确到 0.1），并预测 2023 年我国新能源汽车保有量.

参考数据：令 $t_i=x_i^2$（$i=1,2,3,4,5$），计算得 $\overline{y}=414$，$\sum_{i=1}^{5}x_iy_i=7704$，$\sum_{i=1}^{5}t_iy_i=32094$，$\sum_{i}^{5}t_i^2=979$.

参考公式：在回归方程 $y=\hat{b}t+a$ 中，$\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}t_iy_i-n\overline{t}\,\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}t_i^2-n\overline{t}^2}$，$a=\overline{y}-\hat{b}\overline{t}$.

【答案】（1）450 块

（2）① $y=bx^2+a$ 更适合作为 y 与 x 之间的回归方程模型；② $y=24.9x^2+140.1$.

【解析】

【分析】（1）根据正态分布计算概率；

（2）相关系数绝对值越大相关性越强，根据给出公式，代入数据计算可得回归方程.

【小问 1 详解】

因为新能源汽车电池的使用寿命 $\xi\sim N\left(60,4^2\right)$，

所以 $P(\xi>68)=\dfrac{1-P\left(\mu-2\sigma\le\xi\le\mu+2\sigma\right)}{2}=\dfrac{1-0.955}{2}=0.0225$，

所以 $20000\times0.0225=450$ 块.

答：每月生产的 2 万块电池中，使用寿命超过 68 万公里的大约有 450 块；

【小问 2 详解】

①因为 $\left|r_2\right|>\left|r_1\right|$，所以 $y=bx^2+a$ 更适合作为 y 与 x 之间的回归方程模型.

②因为 $\bar{t}=\dfrac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2}{5}=11$，

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}t_iy_i-n\bar{t}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}t_i^2-n\bar{t}^2}=\frac{32094-5\times11\times414}{979-5\times11^2}\approx24.9,$$

$a=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}=414-24.9\times11=140.1$，

所以 $y=24.9t+140.1=24.9x^2+140.1$.

当 $x=7$ 时，$y=24.9\times49+140.1=1360.2$ 万辆.

答：2023 年我国新能源汽车保有量约为 1360.2 万辆.

20. 如图 1，在长方形 $ABCD$ 中，已知 $AB=2$，$BC=1$，E 为 CD 中点，F 为线段 EC 上（端点 E，C 除外）的动点，过点 D 作 AF 的垂线分别交 AF，AB 于 O，K 两点. 现将 $\triangle DAF$ 折起，使得 $DK\perp AB$（如图 2）.

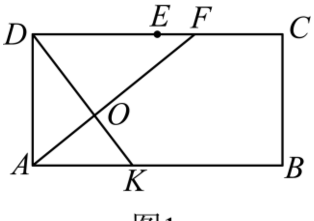


图1

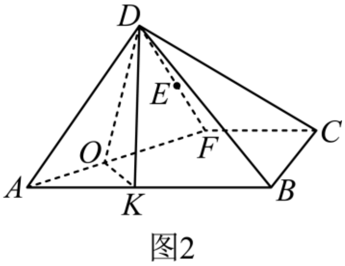


图2

（1）证明：平面 $ABD\perp$ 平面 ABC；

（2）求直线 DF 与平面 ABC 所成角的最大值.

【答案】（1）证明见解析

（2）$\dfrac{\pi}{6}$

【解析】

【分析】（1）先证 $AF \perp$ 平面 ODK，得 $DK \subset$ 平面 ODK，所以 $AF \perp DK$，再证 $DK \perp$ 平面 ABC，从而得证面面垂直；

（2）直线 DF 与平面 $ABCF$ 所成角为 $\angle DFK$，记 $\angle DFK = \theta$，设 $DF = x$（$1 < x < 2$），由！FDA□！DAK，得 $AK = \dfrac{1}{x}$，计算 $\sin\theta$，利用基本不等式得最大值，从而得角的最大值.

【小问 1 详解】

因为 $AF \perp OK$， $AF \perp OD$，OD，$OK \subset$ 平面 ODK， $OD \cap OK = O$，

所以 $AF \perp$ 平面 ODK .

因为 $DK \subset$ 平面 ODK，所以 $AF \perp DK$.

又因为 $DK \perp AB$， AB， $AF \subset$ 平面 ABC， $AB \cap AF = A$，

所以 $DK \perp$ 平面 ABC .

因为 $DK \subset$ 平面 ABD，所以平面 $ABD \perp$ 平面 ABC .

【小问 2 详解】

连结 FK，由（1）可知，直线 DF 与平面 $ABCF$ 所成角为 $\angle DFK$，记 $\angle DFK = \theta$.

在图 1 中，因为 $DK \perp AF$，所以 $\angle DFA + \angle FDK = 90°$，

又因为 $\angle FDA = \angle FDK + \angle ADK = 90°$，所以 $\angle DFA = \angle ADK$.

又因为 $\angle FDA = \angle DAK = 90°$，所以！$FDA$□！$DAK$.

设 $DF = x$（$1 < x < 2$），由 $\dfrac{DF}{AD} = \dfrac{DA}{AK}$，得 $\dfrac{x}{1} = \dfrac{1}{AK}$，解得 $AK = \dfrac{1}{x}$.

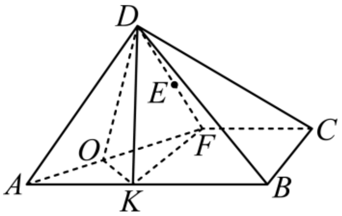
在图 2 中，因 $DK \perp AB$，所以 $DK = \sqrt{DA^2 - AK^2} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}}$，

所以 $\sin\theta = \dfrac{DK}{DF} = \dfrac{1}{x}\sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}} = \sqrt{\dfrac{1}{x^2}\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)} \le \dfrac{1}{2}$，

当且仅当 $x = \sqrt{2}$ 时等号成立，

又因为 $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$，所以 θ 的最大值为 $\dfrac{\pi}{6}$，

即直线 DF 与平面 ABC 所成角的最大值为 $\dfrac{\pi}{6}$.



21. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 C_1： $x^2=2py$ 的焦点与椭圆 C_2： $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的右焦点关于直线 $y=x$ 对称.

（1）求 C_1 的标准方程；

（2）若直线 l 与 C_1 相切，且与 C_2 相交于 A，B 两点，求 $\triangle AOB$ 面积的最大值.

（注：直线与抛物线有且只有一个公共点，且与抛物线的对称轴不平行，则称该直线与抛物线相切，称该公共点为切点）

【答案】（1） $x^2=4y$

（2） $\sqrt{3}$

【解析】

【分析】（1）求出椭圆焦点坐标，根据 C_1 的焦点与 C_2 的右焦点关于直线 $y=x$ 对称，可求得抛物线焦点坐标，进而求得抛物线方程.

（2）根据直线 l 与 C_1 相切，设出直线方程与椭圆方程联立，求得弦长 $|AB|$ 和点 O 到直线的距离，写出 $\triangle AOB$ 面积，化简利用重要不等式求最值.

【小问 1 详解】

因为 C_2 的右焦点为 $(1,0)$， C_1 的焦点与 C_2 的右焦点关于直线 $y=x$ 对称，

所以 C_1 的焦点为 $(0,1)$，

所以 $\dfrac{p}{2}=1$，即 $p=2$，所以 C_1 的标准方程为 $x^2=4y$.

【小问 2 详解】

设 l 与 C_1 相切于点 $P\left(2t,t^2\right)$ （$t\neq 0$），因为 $y=\dfrac{1}{4}x^2$，所以 $y'=\dfrac{x}{2}$，

所以 l 的斜率 $k=\dfrac{2t}{2}=t$，所以 l 的方程为 $y=tx-t^2$.

由$\begin{cases} y=tx-t^2, \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1, \end{cases}$ 得$\left(3+4t^2\right)x^2-8t^3x+4t^4-12=0$，

因为$\Delta=64t^6-4\left(3+4t^2\right)\left(4t^4-12\right)>0$，所以$t^4-4t^2-3<0$（*）.

设$A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，由韦达定理可知$x_1+x_2=\dfrac{8t^3}{3+4t^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4t^4-12}{3+4t^2}$，

所以：$|AB|=\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2}=\sqrt{1+t^2}\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2}=\sqrt{1+t^2}\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{1+t^2}\sqrt{\dfrac{\left(8t^3\right)^2-4\left(4t^4-12\right)\left(3+4t^2\right)}{\left(3+4t^2\right)^2}}=\dfrac{4\sqrt{3\left(1+t^2\right)\left(-t^4+4t^2+3\right)}}{3+4t^2}$.

又因为点O到直线l的距离$d=\dfrac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}$，

所以$\triangle AOB$的面积$S=\dfrac{1}{2}\cdot|AB|\cdot d=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4\sqrt{3\left(1+t^2\right)\left(-t^4+4t^2+3\right)}}{3+4t^2}\cdot\dfrac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}$

$=\dfrac{2\sqrt{3}t^2\sqrt{-t^4+4t^2+3}}{3+4t^2}\le\dfrac{2\sqrt{3}}{3+4t^2}\cdot\dfrac{\left(-t^4+4t^2+3\right)+t^4}{2}=\sqrt{3}$，

当且仅当$t^2=\sqrt{-t^4+4t^2+3}$，即$t^2=\dfrac{2+\sqrt{10}}{2}$时等号成立，

此时$t^4-3-4t^2<0$满足（*），

所以$\triangle AOB$面积的最大值为$\sqrt{3}$.

【点睛】思路点睛：解决直线与圆锥曲线的综合问题时，要注意：

(1)注意观察应用题设中的每一个条件，明确确定直线、圆锥曲线的条件；

(2)强化有关直线与圆锥曲线联立得出一元二次方程后的运算能力，重视根与系数之间的关系、弦长、斜率、三角形的面积等问题.

22. 已知函数$f(x)=\ln(x+1)-\dfrac{ax}{x+2}$.

（1）若$x\ge0$时，$f(x)\ge0$，求实数a的取值范围；

（2）讨论$f(x)$的零点个数.

【答案】（1）$a\le2$

（2）答案见解析

【解析】

【分析】（1）根据题意，求导，得到 $f'(x)=\dfrac{x^2+(4-2a)(x+1)}{(x+1)(x+2)^2}$，对 a 进行分类讨论，可得 $f(x)$ 的单调性，进而求得 $f(x)\geq 0$ 的时候，实数 a 的取值范围.

（2）通过分类讨论 a，可得函数 $f(x)$ 的单调性，进而得到 $f(x)$ 的图像，根据数形结合，可得 $f(x)$ 的零点个数.

【小问 1 详解】

$f(x)$ 的定义域是 $(-1,+\infty)$， $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2a}{(x+2)^2}=\dfrac{x^2+(4-2a)(x+1)}{(x+1)(x+2)^2}$.

①当 $a\leq 2$ 时， $f'(x)\geq 0$，所以 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，

又因为 $f(0)=0$，所以当 $x\geq 0$ 时， $f(x)\geq f(0)=0$，满足题意；

②当 $a>2$ 时，令 $g(x)=x^2+(4-2a)(x+1)=x^2+(4-2a)x+(4-2a)$，

由 $g(x)=0$，得 $x_1=(a-2)-\sqrt{a^2-2a}<0$， $x_2=(a-2)+\sqrt{a^2-2a}>0$.

当 $x\in(0,x_2)$ 时， $g(x)<0$， $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,x_2)$ 上单调递减，

所以 $f(x_2)<f(0)=0$，不满足题意.

综上所述， $a\leq 2$.

【小问 2 详解】

①当 $a\leq 2$ 时，由（1）可得 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，且 $f(0)=0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上存在 1 个零点；

②当 $a>2$ 时，由（1）可得 $g(x)=0$ 必有两根 x_1， x_2，

又因为 $g(-1)=1>0$， $g(0)=4-2a<0$ 所以 $x_1\in(-1,0)$， $x_2\in(0,+\infty)$.

x	$(-1,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	单调递增	极大值 $f(x_1)$	单调递减	极小值 $f(x_2)$	单调递增

当 $x\in(x_1,x_2)$ 时，因为 $f(0)=0$，所以 $f(x)$ 在 (x_1,x_2) 上存在 1 个零点，

且 $f\left(x_1\right)>f\left(0\right)=0$， $f\left(x_2\right)<f\left(0\right)=0$；

当 $x\in\left(-1,x_1\right)$ 时，因为 $f\left(\mathrm{e}^{-a}-1\right)=\ln\mathrm{e}^{-a}-\dfrac{a\left(\mathrm{e}^{-a}-1\right)}{\mathrm{e}^{-a}+1}=\dfrac{-2a\mathrm{e}^{-a}}{\mathrm{e}^{-a}+1}<0$，

$-1<\mathrm{e}^{-a}-1<0$，而 $f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 单调递增，且 $f'(x_1)=0$，而 $g(\mathrm{e}^{-a}-1)>0$，故 $-1<\mathrm{e}^{-a}-1<x_1$，所以 $f(x)$ 在 $\left(-1,x_1\right)$ 上存在 1 个零点；

当 $x\in\left(x_2,+\infty\right)$ 时，因为 $f\left(\mathrm{e}^{a}-1\right)=\ln\mathrm{e}^{a}-\dfrac{a\left(\mathrm{e}^{a}-1\right)}{\mathrm{e}^{a}+1}=\dfrac{2a}{\mathrm{e}^{a}+1}>0$，

$\mathrm{e}^{a}-1>0$，而 $f(x)$ 在 $(x_2,+\infty)$ 单调递增，且 $f'(x_2)=0$，而 $g(\mathrm{e}^{a}-1)>0$，

所以 $\mathrm{e}^{a}-1>x_2$，所以 $f(x)$ 在 $\left(x_2,+\infty\right)$ 上存在 1 个零点.

从而 $f(x)$ 在 $\left(-1,+\infty\right)$ 上存在 3 个零点.

综上所述，当 $a\le 2$ 时， $f(x)$ 存在 1 个零点；当 $a>2$ 时， $f(x)$ 存在 3 个零点.

【点睛】思路点睛：通过求导，得到 $f'(x)$，通过分析导数，得到 $f(x)$ 的图像，通过数形结合，可求得不等式恒成立时，参数的取值范围，以及相应的 $f(x)$ 的零点个数