

学生经验:数学解题教学的基石

——由“数列通项的放缩”教学引发的思考

●江苏省太仓高级中学 周艳东

1 引言

最近,笔者观摩了一堂高三二轮复习课.本节课是以微专题的形式进行的,主题为“数列通项的放缩”.众所周知,数列通项的放缩一直是教学的难点、学生的痛点、高考的热点.数列放缩形式多变,技巧性极强,以微专题的形式进行针对性的突破应该是一种比较有效的教学手段,但整堂课下来,笔者发现困扰学生的问题依旧摆在那里,没有得到根本性的解决.

2 教学过程简介

上课教师首先引导学生回顾3个常用的数列通项放缩公式:

$$\begin{aligned} (1) \frac{1}{n^2} &< \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}; \\ (2) \frac{1}{n^2} &> \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}; \\ (3) \frac{1}{(2n-1)^2} &> \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right). \end{aligned}$$

然后,进入例题讲解环节.

例1 求证: $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{5}{3}$.

解题过程略.

例2 求证: $2(\sqrt{n+1}-1) < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{2}(\sqrt{2n+1}-1)$.

解题过程略.

由这道例题,教师又给出了两个放缩公式: $\frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ 与 $\frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{2}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})$.

随后,每讲解一道例题,就给出一个“有用”的数

列通项放缩公式,例如, $\frac{2^n}{(2^n-1)^2} < \frac{2^n}{(2^n-1)(2^n-2)} = \frac{1}{2^{n-1}-1} - \frac{1}{2^n-1}$, $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$, $\frac{1}{n} > \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 等.教师同时强调,这几个放缩公式基本覆盖了数列放缩的一般情境,若出现其他情况,也只需借助基本不等式、糖水不等式等工具把这些公式进行变形即可.

3 超出学生经验的技巧很难被掌握

在本节课中,教师虽然传授了很多放缩的技巧,给出了现成的公式,但我们知道教学不是简单的传递的过程,而是在学生已有经验基础上有意义的建构过程.有关数列的放缩教材基本没有涉及,就拿前面一开始的“三个”公式来说,也是教师补充的结果,学生放缩的经验原本积累的就不够,一下子面对这么多眼花缭乱的公式,学生很难真正理解与掌握.比如, $\frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ 是怎么来的? 为什么能够成立? 又比如, $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ 与 $\frac{1}{n^2} < 2\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$, 为何同一个数列通项有不同的放缩形式? 在应用的时候该如何抉择? 还有,放缩是随意的吗? 放缩的度该如何控制……这些真正困扰学生的问题,这节课没有进行深入的探讨,而是把教学重心放在放缩技巧的罗列与展示上,意图让学生通过大量的练习能够记住这些放缩公式.显然,这样的教学定位是偏离学生实际的.

4 学生经验是数学解题教学的基石

4.1 明确学生的已有经验

教师一般都有这样的经历,很多好的解题方法讲了很多遍、练了很多遍,但终究教不会,究其原因,就是这些解题方法已经超出了学生的已有经验,单纯的讲解无法对知识的内化起到积极的作用.解题并不是

无源之水,无本之木,它应该立足于学生的已有经验.

那么,在本节课中,学生的已有经验是什么?从知识的角度看,等差、等比数列是学生熟悉的两大数列,学生经历了这两大数列的探究过程,积累了如何认识数列的经验.比如,知道判断一个数列是否是等差数列时,需要把数列的前后两项作差;知道等比数列的首项与公比不能为0;知道通项公式与求和公式之间的相互关系,即 $a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$.从思想方法的角度看,累加法、累乘法、倒序相加法、错位相减法,这几种常用的方法是学生在推导等差、等比数列的通项与求和公式时积累下来的经验,不仅如此,学生还把这些经验进行了迁移.比如,他们知道不仅等差数列求通项可以用累加法,其他数列,如 $a_n - a_{n-1} = n$, $a_n - a_{n-1} = 2^n$ 等,也可以用累加法求通项,只要是形如 $a_n - a_{n-1} = f(n)$ 的都可以用累加法;累乘法也可以进行类似的推广,只要符合 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = f(n)$ 都可以.这些经验就构成了学生的认知基础,是后续学习通项放缩的理论基石.

4.2 建立新经验和旧经验的联系

经验具有正向和负向双重效应.一方面,经验为学生的后续学习奠定了认知基础,促进新的经验的形成;另一方面,经验很容易造成思维定式,从而阻碍学生接受新的经验.解决的唯一办法就是建立新经验和旧经验的联系,从而帮助学生打破思维定式,使经验的迁移得到发生.

因此,本节课首先要解决的是建立起数列通项放缩与学生已有经验之间的联系,从而让学生感受到这些放缩技巧、公式并不是凭空产生的,而是在已有经验基础上的延伸.

例如,在证明 $2(\sqrt{n+1}-1) < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ 时,可以联系 $a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$ 进行分析.因为不等式右边是数列前 n 项和,那么不妨把不等式的左边也看成某个数列 $\{b_n\}$ 的和 S'_n , $S'_n = 2(\sqrt{n+1}-1)$, 则 $b_n = S'_n - S'_{n-1} = 2(\sqrt{n+1}-1) - 2(\sqrt{n}-1) = 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) (n \geq 2)$; 因此,要证明 $2(\sqrt{n+1}-1) < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ 成立,只需证明 $\frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) (n \geq 2)$ 即可;利用分析法,很容

易验证这个不等式成立.于是,原不等式成立.

上述证明方法的优点在于,借助 $a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$ 这个学生非常熟悉的性质直接对不等式进行了证明,不仅没有用到新的放缩技巧,还获得了放缩公式 $\frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) (n \geq 2)$. 就是这种最朴素的方法,能够解决很多数列放缩问题.

4.3 完善已有的经验

学生的已有经验直接决定了新知识与新方法的获得速度与掌握程度,已有经验越丰富越好.因此,在解题教学中,教师要转变理念,要把教学重心从传授新的解题经验转到完善已有的解题经验上.

其实,数列放缩的技巧性与思想性不是几节课就可以完成的,它需要经历一个从熟悉到陌生、从特殊到一般的建构过程.等差、等比数列是认知基础,累和、累乘是方法基础,因此,首先需要对这些基础性的经验进行完善,才能确保后续学习的顺利进行.

比如,对于比较复杂的数列,累加法能用吗?

例3 已知 $a_{n+1} = 2a_n + 1, a_1 = 1$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

很多学生都想到套用公式 $a_{n+1} + \lambda = 2(a_n + \lambda)$ 进行求解,前提是要记住这个公式.但实际上可以直接利用累加法进行推导, $a_{n+1} = 2a_n + 1, a_n = 2a_{n-1} + 1$, 两个式子左右两边分别作差得 $a_{n+1} - a_n = 2(a_n - a_{n-1})$, 则 $a_{n+1} - a_n = 2(a_n - a_{n-1}) = 2^2(a_{n-1} - a_{n-2}) = \dots = 2^{n-1}(a_2 - a_1) = 2^n$, 即 $a_{n+1} - a_n = 2^n$, 接下去就交给累加法了.

变式1: 已知 $a_{n+1} = 2a_n + n - 1, a_1 = 1$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

这个数列的通项当然也可以套用公式 $a_{n+1} + \lambda(n+1) + \mu = 2(a_n + \lambda n + \mu)$, 但用累加法更加容易理解. $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + n - 1, \\ a_n = 2a_{n-1} + n - 2 \end{cases} \Rightarrow a_{n+1} - a_n = 2(a_n - a_{n-1}) + 1$, 令 $b_n = a_n - a_{n-1}$, 则问题转化为求递推公式为 $b_{n+1} = 2b_n + 1$ 的数列通项, 这就与例3一模一样了.

累乘法也能进行类似的推广.

看似简单的运算技巧照样能够展现出巨大的威力,因此,我们没必要刻意地去记忆这些放缩公式,不仅不好记,即使记住了,题目一变化,也用不上.

“学生经验”是数学解题教学的“基石”,在立足学生经验的基础上使学生经验在“破”与“立”的动态平衡中得以汇聚与积淀,最终实现“学生经验”的升级跃迁,这才是解题教学的真谛所在. 