2022-2023 学年度第一学期期末调研测试

高三数学试题

一、选择题.本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．已知集合 $A=\{0,a\}$ ，$B=\{2^a,b\}$ ，若 $A\cap B=\{1\}$ ，则 $a+b=$

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

2．若 $1+i$ 是实系数一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 的一个根，则

A． $p=2,q=2$　　B． $p=2,q=-2$　　C． $p=-2,q=2$　　D． $p=-2,q=-2$

3．若 $(x+y)^6=a_0y^6+a_1xy^5+a_3x^2y^3+\cdots+a_6x^6$ ，则 $(a_0+a_2+a_4+a_6)^2-(a_1+a_3+a_5)^2$ 的值为

A．0　　B．32　　C．64　　D．128

4．在音乐理论中，若音 M 的频率为 m ，音 N 的频率为 n ，则它们的音分差 $1200\log_2\frac{m}{n}$.当音 A 与音 B 的频率比为 $\frac{9}{8}$ 时，音分差为 r ，当音 C 与音 D 的频率比为 $\frac{256}{243}$ 时，音分差为 s ，则

A． $2r+3s=600$　　B． $3r+2s=600$

C． $5r+2s=1200$　　D． $2r+5s=1200$

5．在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $l:x-2y+2=0$ 与抛物线 $C:y^2=4x$ 相交于 A,B 两点，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 的值为

A．4　　B．8　　C．12　　D．16

6．在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(6,8)$ ，将 $\overrightarrow{OA}$ 绕点 O 顺时针旋转 $\frac{\pi}{4}$ 后得 $\overrightarrow{OA'}$ ，则 A' 的纵坐标为

A． $\sqrt{2}$　　B． $\sqrt{3}$　　C．2　　D． $\sqrt{5}$

7．已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$ ，若 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ ，$f(\pi)=1$ ，$f(x)$ 的最小正周期 $T>2\pi$ ，则 φ 的值为

A．$\dfrac{\pi}{6}$　　B．$\dfrac{\pi}{3}$　　C．$\dfrac{2}{3}\pi$　　D．$\dfrac{5}{6}\pi$

8．若实数 a,b,c 满足 $6^a=12^{ac}=3$ ，$3^{b-ab}=5^{a-ab}$ ，则 a,b,c 的大小关系是

A．$a>b>c$　　B．$b>c>a$　　C．$c>a>b$　　D．$c>b>a$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9．已知一组数据为：$4,1,2,5,5,3,3,2,3,2$ ，则

A．标准差为 $\dfrac{8}{5}$　　B．众数为 2 和 3

C．70 分位数为 $\dfrac{7}{2}$　　D．平均数为 3

10．用一个平面截正方体，则截面的形状不可能是

A．锐角三角形　　B．直角梯形　　C．正五边形　　D．边长不相等的六边形

11．已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)=x^4-x^2+ax+1$ ，则

A．存在位于的实数 a ，使函数 $f(x)$ 的图象是轴对称图形

B．存在实数 a ，使函数 $f(x)$ 为单调函数

C．对任意实数 a ，函数 $f(x)$ 都存在最小值

D．对任意实数 a ，函数 $f(x)$ 都存在两条过原点的切线

12．过圆 $O:x^2+y^2=8$ 内一点 $P(1,\sqrt{3})$ 作两条互相垂直的弦 AB,CD ，得到四边形 $ADBC$ ，则

A．$|AB|$ 的最小值为 4　　B．当 $|AB|=2\sqrt{5}$ 时，$|CD|=2\sqrt{7}$

C．四边形 $ADBC$ 面积的最大值为 16　　D．$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ 为定值

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．若椭圆C_2的焦点在y轴上，且与椭圆$C_1:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$的离心率相同，则椭圆$C_2$的一个标准方程为__________.

14．某公司决定从甲、乙两名员工中选一人去完成一项任务，两人被选中的概率都是0.5.据以往经验，若选员工甲，按时完成任务的概率为0.8；若选员工乙，按时完成任务的概率为0.9.则选派一名员工，任务被按时完成的概率为__________.

15．设正项等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_4=10S_2$，则$\dfrac{S_6}{S_2}$的值为__________.

16．一名学生参加学校社团活动，利用3D技术打印一个几何模型.该模型由一个几何体M及其外接球O组成，几何体M由一个内角都是$120°$的六边形$ABCDEF$绕边BC旋转一周得到，且满足$AB=AF=DC=DE$，$BC=EF$，则球O与几何体M的体积之比为__________.

四、解答题：本题共6小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17．(10分)记$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$\dfrac{\sin A}{\sin C}+\dfrac{\sin C}{\sin A}=2\cos B+1$.

(1)求证：$b^2=ac$；

(2)若$\dfrac{b^2}{a^2+c^2}=\dfrac{2}{5}$，求$\cos B$的值.

18．（12 分）已知数列$\{a_n\}$满足$\dfrac{3a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{2a_n+1}{a_2}$，$\dfrac{2}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}=\dfrac{1}{a_3}$，$a_2>0$.

（1）求证：数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是等差数列；

（2）求数列$\{a_na_{n+1}\}$的前n项和S_n.

19．（12 分）甲、乙两个学校进行球类运动比赛，比赛共设足球、篮球、排球三个项目，每个项目胜方得100分，负方得0分，没有平局，三个项目比赛结束后，总得分高的学校获得冠军，已知甲校在三个项目中获胜的概率分别为$0.4,0.6,0.5$，各项目比赛互不影响.

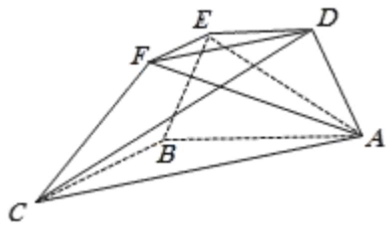
（1）求乙获得冠军的概率；

（2）用X表示甲校的总得分，求X的分布列与期望.

20．（12 分）如图，在三棱台 $ABC-DEF$ 中，已知平面 $ABED\perp$ 平面 $BCFE$ ，$BA\perp BC$ ，$BC=3$ ，$BE=DE=DA=\frac{1}{2}AB=1$.

（1）求证：直线 $AE\perp$ 平面 $BCFE$ ；

（2）求平面 CDF 与平面 AEF 所成角的正弦值.



21．（12 分）在平面直角坐标系 xOy 中，过点 $P(-2,0)$ 的直线 l 与曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左支交于 A,B 两点，直线 OA 与双曲线 C 的右支交于点 D.已知双曲线 C 的离心率为 $\sqrt{2}$ ，当直线 l 与 x 轴垂直时，$|BD|=\sqrt{2}|AB|$.

（1）求双曲线 C 的标准方程；

（2）证明：直线 BD 与圆 $O:x^2+y^2=2$ 相切.

22．（12 分）已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}-\frac{1}{6}ax^{3}$（ a 为非零常数），记 $f_{n+1}(x)=f_n'(x)(n\in\mathbf{N})$，

$f_0(x)=f(x)$.

（1）当 $x>0$ 时，$f(x)\geq 0$ 恒成立，求实数 a 的最大值；

（2）当 $a=1$ 时，设 $g_n(x)=\sum_{i=2}^{n}f_i(x)$，对任意的 $n\geq 3$，当 $x=t_n$ 时，$y=g_n(x)$ 取得最小值，

证明：$g_n(t_n)>0$ 且所有点 $(t_n,g_n(t_n))$ 在一条定直线上；

（3）若函数 $f_0(x),f_1(x),f_2(x)$ 都存在极小值，求实数 a 的取值范围.

2022-2023 学年度第一学期期末调研测试

高三数学试题

一、选择题.本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．已知集合 $A=\{0,a\}$，$B=\{2^a,b\}$，若 $A\cap B=\{1\}$，则 $a+b=$

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【答案】B

【解析】 $A\cap B=\{1\}$，则 $a=1$，$A=\{0,1\}$，$B=\{2,1\}$，即 $b=1$，$\therefore a-b=2$，选 B.

2．若 $1+\mathrm{i}$ 是实系数一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 的一个根，则

A． $p=2,q=2$　　B． $p=2,q=-2$　　C． $p=-2,q=2$　　D． $p=-2,q=-2$

【答案】C

【解析】 $(1+\mathrm{i})^2+p(1+\mathrm{i})+q=0$，$2\mathrm{i}+p+p\mathrm{i}+q=0$，$(2+p)\mathrm{i}+p+q=0$，

$\therefore\begin{cases}2+p=0\\p+q=0\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}p=-2\\q=2\end{cases}$，选 C.

3．若 $(x+y)^6=a_0y^6+a_1xy^5+a_3x^2y^3+\cdots+a_6x^6$，则 $(a_0+a_2+a_4+a_6)^2-(a_1+a_3+a_5)^2$ 的值为

A．0　　B．32　　C．64　　D．128

【答案】A

【解析】 $x=1,y=-1$ 时，$0=a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6$

$x=1,y=1$ 时，$64=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$

$(a_0+a_2+a_4+a_6)^2-(a_1+a_3+a_5)^2$

$=(a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6)(a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)=0\times64=0$，选 A.

4．在音乐理论中，若音 M 的频率为 m，音 N 的频率为 n，则它们的音分差 $1200\log_2\dfrac{m}{n}$.当

音 A 与音 B 的频率比为 $\frac{9}{8}$ 时，音分差为 r ，当音 C 与音 D 的频率比为 $\frac{256}{243}$ 时，音分差为 s ，则

A．$2r+3s=600$　　B．$3r+2s=600$

C．$5r+2s=1200$　　D．$2r+5s=1200$

【答案】C

【解析】$r=1200\log_2\frac{9}{8}=1200(\log_2 9-3)=2400\log_2 3-3600$ ，

$s=1200\log_2\frac{256}{243}=1200(8-5\log_2 3)=9600-6000\log_2 3$ ，$5r+2s=1200$ ，选 C.

5．在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $l: x-2y+2=0$ 与抛物线 $C: y^2=4x$ 相交于 A,B 两点，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 的值为

A．4　　B．8　　C．12　　D．16

【答案】C

【解析】$\begin{cases}x-2y+2=0\\ y^2=4x\end{cases}$ ，消 x 可得 $y^2-8y+8=0$ ，

令 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ ，$y_1y_2=8$ ，$x_1x_2=\frac{y_1^2}{4}\cdot\frac{y_2^2}{4}=4$ ，

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=12$ ，选 C.

6．在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(6,8)$ ，将 $\overrightarrow{OA}$ 绕点 O 顺时针旋转 $\frac{\pi}{4}$ 后得 $\overrightarrow{OA'}$ ，则 A' 的纵坐标为

A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．2　　D．$\sqrt{5}$

【答案】A

【解析】设 $A(6,8)$ 是 α 角终边上一点，则 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ ，$\cos\alpha=\frac{3}{5}$ ，

$\overrightarrow{OA}$ 绕点 O 顺时针旋转 $\frac{\pi}{4}$ 后得 $\overrightarrow{OA'}$ ，则 $y_{A'}=10\cdot\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$ ，选 A.

7．已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$，若 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$，$f(\pi)=1$，$f(x)$ 的最小正周期 $T>2\pi$，则 φ 的值为

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{2}{3}\pi$　　D．$\frac{5}{6}\pi$

【答案】D

【解析】$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$，$f(\pi)=-1$，则 $\pi-\frac{\pi}{4}=\left(\frac{1}{4}+\frac{k}{2}\right)T,k\in\mathbf{Z}$，

$\therefore T=\frac{\frac{3}{4}\pi}{\frac{1}{4}+\frac{k}{2}}>2\pi$，$\therefore k=0$，即 $T=3\pi=\frac{2\pi}{\omega},\omega=\frac{2}{3}$，

$f(x)=\sin\left(\frac{2}{3}x+\varphi\right)$，$f(\pi)=\sin\left(\frac{2}{3}\pi+\varphi\right)=-1$，$\therefore\varphi=\frac{5}{6}\pi$，选 D.

8．若实数 a,b,c 满足 $6^a=12^{ac}=3$，$3^{b-ab}=5^{a-ab}$，则 a,b,c 的大小关系是

A．$a>b>c$　　B．$b>c>a$　　C．$c>a>b$　　D．$c>b>a$

【答案】D

【解析】方法一：$6^a=3$，$\therefore a=\log_6 3$，$12^{ac}=3$，$\therefore ac=\log_{12}3$，$\therefore c=\frac{\log_{12}3}{\log_6 3}=\log_{12}6$，

$3^{b-ab}=5^{a-ab}$，$\therefore(6^a)^{b-ab}=5^{a-ab}$，$\therefore(6^{1-a})^{ab}=\left(5^{\frac{1}{b}-1}\right)^{ab}$，$\therefore 6^{1-a}=5^{\frac{1}{b}-1}$，

$\therefore\frac{1}{b}-1=\log_5 6^{1-a}=(1-a)\log_5 6=\log_{b^2}\log_5 6=\log_5 2$

$\therefore\frac{1}{b}=\log_5 10$，$\therefore b=\log_{10}5$，

$\therefore a=\log_6\frac{6}{2}=1-\log_6 2=1-\frac{\ln 2}{\ln 6}$，$b=\log_{10}\frac{10}{2}=1-\log_{10}2=1-\frac{\ln 2}{\ln 10}$，

$c=\log_{12}\frac{12}{2}=1-\log_{12}2=1-\frac{\ln 2}{\ln 12}$，$-\frac{1}{\ln 6}<-\frac{1}{\ln 10}<-\frac{1}{\ln 12}$

$\therefore a<b<c$，选 D.

方法二： 由$6^a=12^{ac}=3\Rightarrow a=\log_6 3$，$c=\dfrac{\log_{12}3}{\log_6 3}=\log_{12}6$

而$b=\log_{10}5$，$1-a=\log_6 2$，$1-c=\log_{12}2$，$1-b=\log_{10}2$，

$\because \log_6 2>\log_{10}2>\log_{12}2\Rightarrow 1-a>1-b>1-c$，$\therefore a<b<c$，选 D.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9．已知一组数据为：$4,1,2,5,5,3,3,2,3,2$，则

A．标准差为$\dfrac{8}{5}$　　　　B．众数为2和3

C．70分位数为$\dfrac{7}{2}$　　　　D．平均数为3

【答案】BCD

【解析】 $\overline{x}=3$，D 对. $S^2=\dfrac{1}{10}(4+1\times3+0\times3+1\times1+4\times2)=\dfrac{8}{5}$，方差为$\dfrac{8}{5}$，A 错.

众数为2和3，B 对.

$10\times70\%=7$，按大小顺序排为$1,2,2,2,3,3,3,4,5,5$，第$7,8$位数的平均数为$\dfrac{7}{2}$，C 对.

10．用一个平面截正方体，则截面的形状不可能是

A．锐角三角形　　B．直角梯形　　C．正五边形　　D．边长不相等的六边形

【答案】BC

【解析】 如图（1）截面为锐角三角形，A 不选.

当截面为四边形时可能出现矩形，平行四边形，等腰梯形，但不可能出现直角梯形，B 选.

当截面为五边形时，不可能出现正五边形，C 选.

如图（2）可以是边长不全相等的六边形，D 不选，选 BC.

11．已知定义域为$\mathbf{R}$的函数$f(x)=x^4-x^2+ax+1$，则

A．存在位于的实数a，使函数$f(x)$的图象是轴对称图形

B．存在实数a，使函数$f(x)$为单调函数

C．对任意实数a，函数$f(x)$都存在最小值

D．对任意实数a，函数$f(x)$都存在两条过原点的切线

【答案】ACD

【解析】方法一：$a=0$时，$f(x)=x^4-x^2+1$，$f(x)$为偶函数关于y轴对称，A 对.

$f'(x)=4x^3-2x+a$，$x\to-\infty$时，$f'(x)\to-\infty$，$x\to+\infty$时，$f'(x)\to+\infty$

$\therefore f'(x)$不可能恒正或恒负，B 错.

$f''(x)=12x^2-2=0$，$x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，$f'(x)$在$\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)\nearrow,\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{6},\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)\searrow,\left(\dfrac{\sqrt{6}}{6},+\infty\right)\nearrow$，

$f'(x)_{极大值}=f\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)=\dfrac{2\sqrt{6}}{9}+a$，$f'(x)_{极小值}=f\left(\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)=-\dfrac{2\sqrt{6}}{9}+a$

1° $a+\dfrac{2\sqrt{6}}{9}<0$时，$f'(x)$有且仅有一个零点x_1，$x\in(-\infty,x_1),f'(x)<0,f(x)\searrow$

$x\in(x_1,+\infty),f'(x)>0,f(x)\nearrow$，$f(x)$有最小值.

2° $a-\dfrac{2\sqrt{6}}{9}>0$时，$f'(x)$有且仅有一个零点x_2，$x\in(-\infty,x_2),f'(x)<0,f(x)\searrow$，

$x\in(x_2,+\infty),f'(x)>0,f(x)\nearrow,f(x)$有最小值.

3° $a+\dfrac{2\sqrt{6}}{9}=0$时，$f'(x)$有两个零点$-\dfrac{\sqrt{6}}{6},x_3$，$x\in(-\infty,x_3),f'(x)<0,f(x)\searrow$，

$x\in(x_3,+\infty),f'(x)>0,f(x)\nearrow,f(x)$有最小值.

4° $a-\dfrac{2\sqrt{6}}{9}=0$，同3°

5° $\begin{cases}a-\dfrac{2\sqrt{6}}{9}<0\\ a+\dfrac{2\sqrt{6}}{9}>0\end{cases}$时$f'(x)$有三个零点$x_4,x_5,x_6$，

$f'(x)$在$(-\infty,x_4)\searrow,(x_4,x_5)\nearrow,(x_5,x_6)\searrow,(x_6,+\infty)\nearrow$，$f(x)$有最小值，C 对.

对于 D，设切点$(x_0,x_0^4-x_0^2+ax_0+1)$，$y'=4x^3-2x+a$，$k=4x_0^3-2x_0+a$

切线：$y-(x_0^4-x_0^2+ax_0+1)=(4x_0^3-2x_0+a)(x-x_0)$过$(0,0)$，

$\therefore -x_0^4+x_0^2-ax_0-1=(4x_0^3-2x_0+a)(-x_0)$，

$\therefore 3x_0^4-x_0^2-1=0$有两解，则有两切线，D 对.

方法二：最强秒杀

对于 A，可利用一个结论.

若$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$为轴对称图形，

则$dc=-\frac{1}{8}a(a^2-4b)$且$f(x)$关于$x=-\frac{1}{4}a$对称，$\because f(x)=x^4-x^2+ax+1$为轴对称图形，

$\therefore a=0$，A 正确.

对于 B，$f'(x)=4x^3-2x+a$，当$x\to-\infty$时，$f'(x)\to-\infty$，$x\to+\infty$时，$f'(x)\to+\infty$，

对$\forall\in\mathbf{R}$，$\therefore f'(x)$至少有一个变号零点，$\therefore f(x)$不可能为单调函数，B 错.

对于 C，当$x\to-\infty$以及$x\to+\infty$时，$f(x)$均$\to+\infty$，由$f(x)$在$\mathbf{R}$上连续，

$\therefore$中间$f(x)$必存在最小值，C 正确.

对于 D，设切点$P(x_0,x_0^4-x_0^2+ax_0+1)$，$f'(x)=4x^3-2x+a$，$k=4x_0^3-2x_0+a$，

$\therefore f(x)$在P处切线方程为$y=(4x_0^3-2x_0+a)(x-x_0)+x_0^4-x_0^2+ax_0+1$

$\because$它过原点，$\therefore -4x_0^4+2x_0^2-ax_0+x_0^4-x_0^2+ax_0+1=0$

$\therefore 3x_0^4-x_0^2-1=0$有两解，存在两条切线，$\therefore$D 正确.

选：ACD.

12．过圆$O:x^2+y^2=8$内一点$P(1,\sqrt{3})$作两条互相垂直的弦AB,CD，得到四边形$ADBC$，则

A．$|AB|$的最小值为4　　B．当$|AB|=2\sqrt{5}$时，$|CD|=2\sqrt{7}$

C．四边形$ADBC$面积的最大值为16　　D．$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$为定值

【答案】ABD

【解析】方法一：当P为AB中点时$|AB|$最小，$OP=2$，$|AB|_{\min}=2\sqrt{8-4}=4$，A 对.

O 到 AB,CD 的距离分别为 d_1,d_2，$AB=2\sqrt{8-d_1^2}=2\sqrt{5}$，$\therefore d_1=\sqrt{3}$，

$d_1^2+d_2^2=14$，$\therefore d_2=1$，$CD=2\sqrt{8-1}=2\sqrt{7}$，B 对.

$$S_{ADBC}=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{8-d_1^2}\cdot 2\sqrt{8-d_2^2}$$

$$=2\sqrt{64-8(d_1^2+d_2^2)+d_1^2d_2^2}=2\sqrt{64-32+d_1^2d_2^2}$$

$=2\sqrt{32+d_1^2d_2^2}\le 2\sqrt{32+4}=12$，C 错.

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PC})(\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PD})=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}$$

$=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}$.

分别取 AB,CD 的中点 M,N，

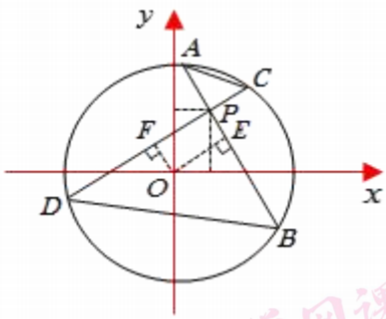
$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=-(MA-PM)(MB+PM)-(NC-PN)(ND+PN)$$

$$=PM^2-MA^2+PN^2-NC^2=d_1^2+d_2^2-(8-d_1^2)-(8-d_2^2)$$

$=2(d_1^2+d_2^2)-16=-8$ 为定值，D 对，选 ABD.

方法二：当 $OP\perp AB$ 时，$|AB|$ 最小，此时 $|AB|_{\min}=2\sqrt{8-4}=4$，A 正确.

过 O 分别作 $OE\perp AB$ 于点 E，$OF\perp CD$ 于点 F，



设 $OE=x,OF=y$，$\therefore x^2+y^2=4$，

当 $|AB|=2\sqrt{5}$ 时，$x=\sqrt{3}$，此时 $y=1$，$|CD|=2\sqrt{7}$，B 正确.

对于 C，$S_{四边形ADBC}=\frac{1}{2}|AB||CD|=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{8-x^2}\cdot 2\sqrt{8-y^2}$

$=2\sqrt{(8-x^2)(8-y^2)}\le 2\cdot\dfrac{16-(x^2+y^2)}{2}=12$，C 错.

对于 D，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA})\cdot(\overrightarrow{PD}-\overrightarrow{PB})=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$

$$=FP^2-DF^2+PE^2-BE^2=x^2-(8-y^2)+y^2-(8-x^2)$$

$=2(x^2+y^2)-16=-8$ 为定值，D 正确，选 ABD.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．若椭圆 C_2 的焦点在 y 轴上，且与椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 的离心率相同，则椭圆 C_2 的一个标准方程为__________.

【答案】 $\dfrac{y^2}{2}+x^2=1$

【解析】 椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 的离心率为 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，椭圆 C_2 可取：$\dfrac{y^2}{2}+x^2=1$.

14．某公司决定从甲、乙两名员工中选一人去完成一项任务，两人被选中的概率都是 0.5.据以往经验，若选员工甲，按时完成任务的概率为 0.8；若选员工乙，按时完成任务的概率为 0.9.则选派一名员工，任务被按时完成的概率为__________.

【答案】 0.85

【解析】 $P=0.5\times0.8+0.5\times0.9=0.85$.

15．设正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_4=10S_2$，则 $\dfrac{S_6}{S_2}$ 的值为__________.

【答案】 91

【解析】方法一： 等比数列 $\{a_n\}$ 中，S_2,S_4-S_2,S_6-S_4 成等比数列，$S_2,9S_2,81S_2$ 成等比数列，$\therefore S_6-S_4=81S_2$，$\therefore S_6=91S_2$，$\therefore \dfrac{S_6}{S_2}=91$.

方法二： 设 $\{a_n\}$ 公比为 q，$\dfrac{a_1(1-q^4)}{1-q}=10\cdot\dfrac{a_1(1-q^2)}{1-q}\Rightarrow q=3$，

$$\therefore \frac{S_6}{S_2}=\frac{\dfrac{a_1(1-q^6)}{1-q}}{\dfrac{a_1(1-q^2)}{1-q}}=\frac{1-3^6}{1-3^2}=91。$$

16．一名学生参加学校社团活动，利用 3D 技术打印一个几何模型.该模型由一个几何体 M 及其外接球 O 组成，几何体 M 由一个内角都是 $120°$ 的六边形 $ABCDEF$ 绕边 BC 旋转一周得到，

且满足 $AB=AF=DC=DE$ ，$BC=EF$ ，则球 O 与几何体 M 的体积之比为__________.

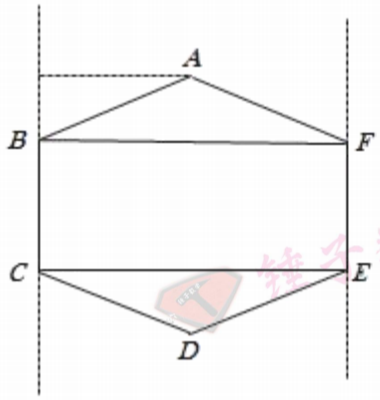
【答案】 $\dfrac{56\sqrt{7}}{81}$

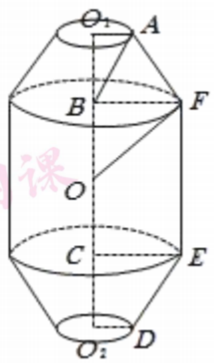
【解析】方法一： 设 $AB=1$，$BC=a$ ，$OF^2=\dfrac{a^2}{4}+3=\left(\dfrac{a}{2}+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}=OA^2$ ，$\therefore a=4$

$\therefore OF=\sqrt{7}$ ，$V_1=\dfrac{4\pi}{3}r^3=\dfrac{28\sqrt{7}}{3}\pi$ ，

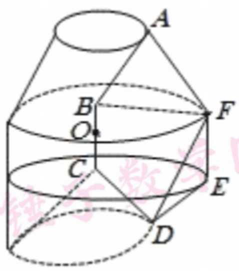
$$V_2=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\pi+3\pi+\frac{3}{2}\pi\right)\times\frac{1}{2}\times 2-2\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\pi\times\frac{1}{2}+3\pi\cdot 4=\frac{54\pi}{4}=\frac{27\pi}{2}$$

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{28\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{2}{27}=\frac{56\sqrt{7}}{81}.$$





方法二： 设 $AB=AF=DC=DE=2a,BC=EF=2b$ ，



$\therefore AB,AF$ 旋转形成的几何体为一个圆台挖去一个圆锥，

$$V_{上台}=\frac{1}{3}[\pi(\sqrt{3}a)^2+\pi\cdot(2\sqrt{3}a)^2+\sqrt{\pi\cdot 3a^2\cdot\pi\cdot 12a^2}]\cdot a-\frac{1}{3}\cdot\pi(\sqrt{3}a)^2\cdot a$$

$=7\pi a^3-\pi a^3=6\pi a^3$

$V_{中圆柱}=\pi(2\sqrt{3}a)^2\cdot 2b=24\pi a^2b$ ，$\therefore V_{几何体}=12\pi a^3+24\pi a^2b$

$\because$ 几何体存在外接球，设 BC 中点为 O ，$\therefore O$ 为球心，由 $OA=OF=R$

$\Rightarrow (b+a)^2+3a^2=b^2+12a^2 \Rightarrow b=4a$

$\therefore R^2=28a^2$，$R=2\sqrt{7}a$，$\therefore V_{球}=\frac{4}{3}\pi\cdot 28a^2\cdot 2\sqrt{7}a$，

$V_M=12\pi a^3+96\pi a^3=108\pi a^3$，

$\therefore \frac{V_{球O}}{V_M}=\frac{56\sqrt{7}}{81}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）记$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$\frac{\sin A}{\sin C}+\frac{\sin C}{\sin A}=2\cos B+1$.

（1）求证：$b^2=ac$；

（2）若$\frac{b^2}{a^2+c^2}=\frac{2}{5}$，求$\cos B$的值.

【解析】

（1）$\because \frac{\sin A}{\sin C}+\frac{\sin C}{\sin A}=2\cos B+1$，$\therefore \frac{a}{c}+\frac{c}{a}=2\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+1$，

$a^2+c^2=a^2+c^2-b^2+ac \Rightarrow b^2=ac$.

（2）$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+c^2-ac}{2ac}=\frac{a^2+c^2}{2ac}-\frac{1}{2}$

由$\frac{b^2}{a^2+c^2}=\frac{2}{5}\Rightarrow\frac{ac}{a^2+c^2}=\frac{2}{5}$，$\therefore \cos B=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$.

18.（12 分）已知数列$\{a_n\}$满足$\frac{3a_n}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+1}{a_2}$，$\frac{2}{a_1}+\frac{1}{a_2}=\frac{1}{a_3}$，$a_2>0$.

（1）求证：数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是等差数列；

（2）求数列$\{a_na_{n+1}\}$的前n项和S_n.

【解析】

（1）$\because \frac{3a_n}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+1}{a_2}\Rightarrow\frac{3}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+1}{a_2a_n}=\frac{1}{a_2}\left(2+\frac{1}{a_n}\right)$，

令$n=1,2\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{3}{a_2}=\dfrac{1}{a_2}\left(2+\dfrac{1}{a_1}\right)\\ \dfrac{3}{a_3}=\dfrac{1}{a_2}\left(2+\dfrac{1}{a_2}\right)\end{cases}$，结合$\dfrac{2}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}=\dfrac{1}{a_3}$，解得$\begin{cases}a_1=1\\ a_2=\dfrac{1}{3}\\ a_3=\dfrac{1}{5}\end{cases}$，

$\therefore\dfrac{3}{a_{n+1}}=6+\dfrac{3}{a_n}\Rightarrow\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=2$，

$\therefore\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$成首项为$1$，公差为$2$的等差数列.

（2）由（1）知$\dfrac{1}{a_n}=1+2(n-1)=2n-1\Rightarrow a_n=\dfrac{1}{2n-1}$，

$\therefore a_na_{n+1}=\dfrac{1}{2n-1}\cdot\dfrac{1}{2n+1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$

$\therefore S_n=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{n}{2n+1}$.

19.（12分）甲、乙两个学校进行球类运动比赛，比赛共设足球、篮球、排球三个项目，每个项目胜方得100分，负方得0分，没有平局，三个项目比赛结束后，总得分高的学校获得冠军，已知甲校在三个项目中获胜的概率分别为$0.4,0.6,0.5$，各项目比赛互不影响.

（1）求乙获得冠军的概率；

（2）用X表示甲校的总得分，求X的分布列与期望.

【解析】

（1）乙校获得冠军的情形分为乙在两个项目中获胜或三个项目均获胜

$P=0.6\times0.4\times0.5+0.6\times0.5\times0.6+0.4\times0.5\times0.4+0.6\times0.4\times0.5=0.5$.

（2）X的所有可能取值为$0,100,200,300$

$P(X=0)=0.6\times0.4\times0.5=0.12$，

$P(X=100)=0.4\times0.4\times0.5+0.6\times0.6\times0.5+0.5\times0.6\times0.4=0.38$，

$P(X=200)=0.4\times0.6\times0.5+0.4\times0.5\times0.4+0.6\times0.5\times0.6=0.38$，

$P(X=300)=0.4\times0.6\times0.5=0.12$，

$\therefore X$ 的分布列如下：

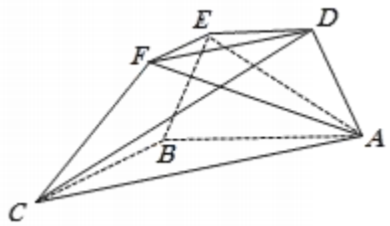
X	0	100	200	300
P	0.12	0.38	0.38	0.12

X 的期望 $E(X)=38+76+36=150$.

20.（12 分）如图，在三棱台 $ABC-DEF$ 中，已知平面 $ABED\perp$ 平面 $BCFE$，$BA\perp BC$，$BC=3$，$BE=DE=DA=\frac{1}{2}AB=1$.

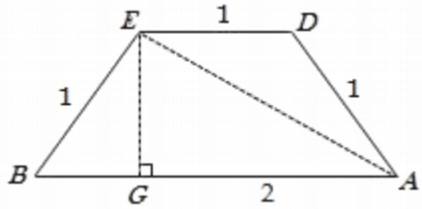
（1）求证：直线 $AE\perp$ 平面 $BCFE$；

（2）求平面 CDF 与平面 AEF 所成角的正弦值.



【解析】

（1）证明：在等腰梯形 $ABED$ 中，过 E 作 $EG\perp AB$ 于点 G，



$\therefore BG=\frac{1}{2}$，$\therefore\angle BEG=30^\circ$ 且 $EG=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$AG=\frac{3}{2}$，$\therefore\angle AEG=60^\circ$，

$\therefore\angle AEB=90^\circ$，$\therefore AE\perp BE$，

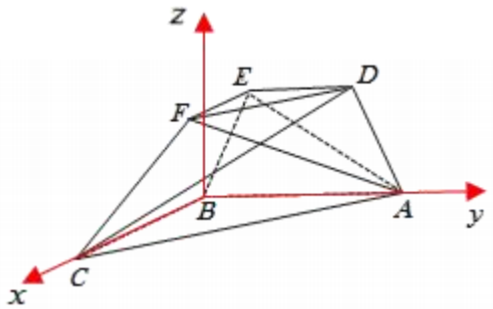
$\because$ 平面 $ABED\perp$ 平面 $BCFE$，平面 $ABED\cap$ 平面 $BCFE=BE$，$AE\subset$ 平面 $ABED$，

$AE\perp BE$，$\therefore AE\perp$ 平面 $BCFE$.

（2）$\because AE\perp$ 平面 $BCFE$，$\therefore AE\perp BC$，又 $\because BC\perp BA$，$\because AE\cap BA=A$，

$\therefore BC\perp$ 平面 $ABED$，$\because BC\subset$ 平面 ABC，$\therefore$ 平面 $ABC\perp$ 平面 $ABED$，

如图建系，则$C(3,0,0),D\left(0,\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),E\left(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),A(0,2,0)$



由$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\Rightarrow F\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\therefore\overrightarrow{CD}=\left(-3,\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\overrightarrow{DF}=\left(\frac{3}{2},-1,0\right)$，

$\overrightarrow{AE}=\left(0,-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{EF}=\left(\frac{3}{2},0,0\right)$.

设平面CDF与平面AEF的一个法向量分别为$\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1),\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$

$$\therefore\begin{cases}-3x_1+\frac{3}{2}y_1+\frac{\sqrt{3}}{2}z_1=0\\ \frac{3}{2}x_1-y_1=0\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{n_1}=(2,3,\sqrt{3})$$

$$\begin{cases}-\frac{3}{2}y_2+\frac{\sqrt{3}}{2}z_2=0\\ \frac{3}{2}x_2=0\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{n_2}=(0,1,\sqrt{3})，$$

设平面CDF与平面AEF所成角为θ，

$$\therefore|\cos\theta|=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{6}{4.2}=\frac{3}{4}，\sin\theta=\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

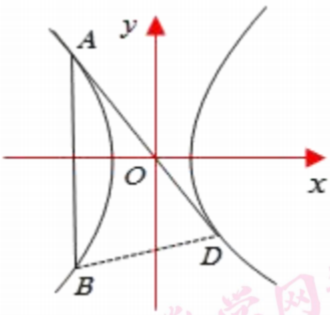
21．（12分）在平面直角坐标系xOy中，过点$P(-2,0)$的直线l与曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的左支交于$A,B$两点，直线$OA$与双曲线$C$的右支交于点$D$.已知双曲线$C$的离心率为$\sqrt{2}$，当直线$l$与$x$轴垂直时，$|BD|=\sqrt{2}|AB|$.

（1）求双曲线C的标准方程；

（2）证明：直线 BD 与圆 $O: x^2+y^2=2$ 相切.

【解析】

（1）当 $l\perp x$ 轴时，$A(-2,y_0),B(-2,-y_0),D(2,-y_0)$



此时，$|BD|=4$，$|AB|=2|y_0|$，由 $|BD|=\sqrt{2}|AB|\Rightarrow 4=2\sqrt{2}|y_0|\Rightarrow |y_0|=\sqrt{2}$，

$\because e=\sqrt{2}$，$\therefore \dfrac{c}{a}=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{2}a$，$b=a$，

$\because A$ 在双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上 $\Rightarrow \dfrac{4}{a^2}-\dfrac{2}{a^2}=1\Rightarrow a^2=2,a=\sqrt{2}$，

$\therefore$ 双曲线 C 的标准方程为：$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$.

（2）设直线 AB 的方程为 $x=my-2$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$D(-x_1,-y_1)$，

$$\begin{cases}x=my-2\\x^2-y^2=2\end{cases}\Rightarrow (m^2-1)y^2-4my+2=0，\Delta=16m^2-8(m^2-1)=8m^2+8$$

$$\therefore k_{BD}=\frac{y_2+y_1}{x_2+x_1}，\therefore BD\text{ 方程为 }y=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}(x-x_2)+y_2=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}x+\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1+x_2}$$

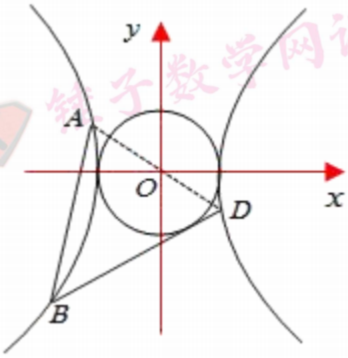
而 $$\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\frac{y_1+y_2}{my_1-2+my_2-2}=\frac{\dfrac{4m}{m^2-1}}{m\cdot\dfrac{4m}{m^2-1}-4}=\frac{4m}{4}=m，$$

而 $$\left|\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1+x_2}\right|=\left|\frac{(my_1-2)y_2-(my_2-2)y_1}{my_1-2+my_2-2}\right|$$

$$=\left|\frac{2(y_1-y_2)}{m(y_1+y_2)-4}\right|=\left|\frac{2\cdot\frac{2\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}}{|1+m^2|}}{m\cdot\frac{4m}{m^2-1}-4}\right|=\left|\frac{4\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}}{-4m^2-4(1-m^2)}\right|=\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}$$

$\therefore O$到直线BD的距离$d=\frac{\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}}{\sqrt{1+m^2}}=\sqrt{2}=r$，

$\therefore$直线BD圆$O:x^2+y^2=2$相切.



22．（12分）已知函数$f(x)=\mathrm{e}^x-\frac{1}{6}ax^3$（$a$为非零常数），记$f_{n+1}(x)=f_n'(x)(n\in\mathbf{N})$，$f_0(x)=f(x)$.

（1）当$x>0$时，$f(x)\geq 0$恒成立，求实数a的最大值；

（2）当$a=1$时，设$g_n(x)=\sum\limits_{i=2}^{n}f_i(x)$，对任意的$n\geq 3$，当$x=t_n$时，$y=g_n(x)$取得最小值，证明：$g_n(t_n)>0$且所有点$(t_n,g_n(t_n))$在一条定直线上；

（3）若函数$f_0(x),f_1(x),f_2(x)$都存在极小值，求实数a的取值范围.

【解析】

（1）由$f(x)\geq 0,x>0\Rightarrow \mathrm{e}^x-\frac{1}{6}ax^3\geq 0\Rightarrow a\leq\left(\frac{6\mathrm{e}^x}{x^3}\right)_{\min}$

令$h(x)=\frac{6\mathrm{e}^x}{x^3}$，$h'(x)=6\cdot\frac{\mathrm{e}^x\cdot x^3-3x^2\cdot \mathrm{e}^x}{x^6}=6\cdot\frac{\mathrm{e}^x(x-3)}{x^4}$，

$\therefore h(x)$在$(0,3)$上↘；$(3,+\infty)$上↗，$\therefore h(x)_{\min}=h(3)=\frac{6\mathrm{e}^3}{27}=\frac{2\mathrm{e}^3}{9}$，$\therefore a\leq\frac{2\mathrm{e}^3}{9}$

即a的最大值为$\frac{2e^3}{9}$.

（2）$f(x)=e^x-\frac{1}{6}x^3$，$\therefore f_1(x)=f'(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2$，$f_2(x)=f_1'(x)=e^x-x$，

$f_3(x)=f_2'(x)=e^x-1$，$f_4(x)=e^x$，$n\ge 4$时，$f_n(x)=e^x$，

当$n\ge 3$时，$g_n(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}f_i(x)=e^x-x+e^x-1+(n-3)e^x=(n-1)e^x-x-1$

$g_n'(x)=(n-1)e^x-1$，令$g_n'(x)=0\Rightarrow x=\ln\frac{1}{n-1}$

当$x<\ln\frac{1}{n-1}$时，$g_n'(x)<0, g_n(x)\searrow$；当$x>\ln\frac{1}{n-1}$时，$g_n'(x)>0, g_n(x)\nearrow$

$\therefore x=t_n=\ln\frac{1}{n-1}$时，$y=g_n(x)$取得最小值，

且$g_n(t_n)=(n-1)\cdot\frac{1}{n-1}-\ln\frac{1}{n-1}-1=\ln(n-1)\ge\ln 2>0$，

$\therefore (t_n,g_n(t_n))$为$\left(\ln\frac{1}{n-1},\ln(n-1)\right)$在定直线$y=-x$上运动.

（3）$f_0(x)=e^x-\frac{1}{6}ax^3$，$f_1(x)=e^x-\frac{1}{2}ax^2$，$f_2(x)=e^x-ax$均存在最小值，

$f_2'(x)=e^x-a$，当$a\le 0$时，$f_2'(x)>0, f_2(x)\nearrow$，$f_2(x)$不存在极小值，舍去

当$a>0$时，令$f_2'(x)=0\Rightarrow x=\ln a$，且$f_2(x)$在$(-\infty,\ln a)$上$\searrow$；$(\ln a,+\infty)$上$\nearrow$，

$\therefore f_2(x)$在$x=\ln a$处取得极小值

$f_1'(x)=e^x-ax$，$f_1''(x)=e^x-a$，$f_1'(x)_{\min}=f'(\ln a)=a-a\ln a$，

要使$f_1(x)$存在极小值，则$f_1'(x)_{\min}=a-a\ln a<0\Rightarrow a>e$

此时$f_1'(a)=e^a-a^2>0$，$\therefore f_1'(x)$在$(\ln a,a)$上有唯一的零点x_0，

且当$\ln a<x<x_0$时，$f_1'(x)<0, f_1(x)\searrow$；当$x>x_0$时，$f_1'(x)>0, f_1(x)\nearrow$

$\therefore f_1(x)$存在极小值.

当$a>e$时，考察$f_0(x)$极值情形，

$f_0'(x)=\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}ax^2=\frac{a}{2}\mathrm{e}^x\left(\frac{2}{a}-\frac{x^2}{\mathrm{e}^x}\right)$，令$\varphi(x)=\frac{2}{a}-\frac{x^2}{\mathrm{e}^x}$，

$\varphi'(x)=-\frac{2x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x\cdot x^2}{\mathrm{e}^{2x}}=\frac{x(x-2)}{\mathrm{e}^x}$，$\varphi(x)$在$(-\infty,0)$上↗；$(0,2)$上↘；$(2,+\infty)$上↗，

$x\to-\infty$时，$\varphi(x)\to-\infty$，$\varphi(0)=\frac{2}{a}>0$，$\therefore\varphi(x)$在$(-\infty,0)$上有唯一的零点x_1，

且当$x<x_1$时，$\varphi(x)<0,f_0'(x)<0,f_0(x)$↘；

当$x_1<x<0$时，$f_0(x)$↗，$\therefore f_0(x)$在$x=x_1$处取得极小值，符合条件.

综上：实数a的取值范围为$(\mathrm{e},+\infty)$.