二次曲线系方法解题赏析

广东省佛山市南海区大沥高级中学 (528231)　陈美凤

摘要　解析几何的基本思想是用代数的手段来研究几何问题. 自广东高考使用全国卷以来, 圆锥曲线作为压轴题呈现在高考试卷中, 其复杂繁琐的运算过程让学生苦涩难言, 望而生畏. 如何在运算中突出重围演绎精彩? 这是我们作为一线老师不得不处理的数学问题. 本文以 2018~2022 年的五道高考真题为例, 探索研究二次曲线系在解析几何中的应用.

关键词　二次曲线系; 圆锥曲线; 定值; 定点

解析几何是高中数学的主干知识, 也是高考的必考点. 解决圆锥曲线问题要用解析法思想, 解析法思想的最大好处就在于通过代数法将几何问题的解决变成统一的模式, 解题方法变得有章可循, 解题过程变得井然有序, 而且能按照一定的步骤或程序来推导、求解. 但其中的计算过程往往艰难而苦涩. 笔者翻阅近五年高考题中的圆锥曲线问题, 总体的感觉是点多, 线多, 几何关系复杂, 解题运算过程繁杂. 是否存在有效快捷的方法来解决这复杂的运算问题呢? 本文将结合五道高考真题向大家呈现二次曲线系在解决这些复杂圆锥曲线问题中的妙处.

一、准备知识

1. 二次曲线的一般方程为 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0\ \left(A^2+B^2+C^2\neq 0\right)$.

2. 设 $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ 与 $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$ 是两条直线, 称二次曲线:

$$\left(A_1x+B_1y+C_1\right)\left(A_2x+B_2y+C_2\right)=0$$

为一条退化的二次曲线.

3. 二次曲线系的两条性质:

(1) 若二次曲线 $C_1: f_1(x,y)=0$ 与二次曲线 $C_2: f_2(x,y)=0$ 有四个不同的交点, 则过这四个点的二次曲线系 (即过这四个点的所有二次曲线) 方程为 $\mu_1 f_1(x,y)+\mu_2 f_2(x,y)=0$, 其中 μ_1,μ_2 为常数.

注: 当我们所求的二次曲线不是 C_2 本身时, 也可以设曲线系方程为 $f_1(x,y)+\mu f_2(x,y)=0$.

(2) 若直线 $l_1(x,y)=A_1x+B_1y+C_1=0$ 及 $l_2(x,y)=A_2x+B_2y+C_2=0$ 与二次曲线 $C: f(x,y)=0$ 有四个交点, 则过这四点的二次曲线系方程为 $\mu_1 l_1(x,y)l_2(x,y)+\mu_2 f(x,y)=0$.

接下来, 我们来看看二次曲线系的应用场景, 通过对比 2018~2022 年的五道圆锥曲线高考试题的常规解法, 来展示留藏在二次曲线系中的"别有洞天".

二、应用场景

(一) 定值问题

真题 1　(2022 年高考甲卷理科数学) 设抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F, 点 $D(p,0)$, 过 F 的直线交 C 于 M, N 两点. 当直线 MD 垂直于 x 轴时, $|MF|=3$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 设直线 MD, ND 与 C 的另一个交点分别为 A, B, 记直线 MN, AB 的倾斜角分别为 α,β. 当 $\alpha-\beta$ 取得最大值时, 求直线 AB 的方程.

解析　(1) 抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$. (过程从略)

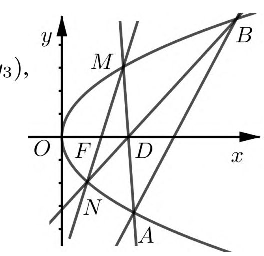

图 1

(2) (解法 1 常规方法) 设 $M(\frac{y_1^2}{4},y_1)$, $N(\frac{y_2^2}{4},y_2)$, $A(\frac{y_3^2}{4},y_3)$, $B(\frac{y_4^2}{4},y_4)$, 直线 $MN: x=my+1$, 将其与抛物线方程联立可得 $y^2-4my-4=0$, $\Delta>0, y_1y_2=-4$, 由斜率公式可得 $k_{MN}=\dfrac{4}{y_1+y_2}$, $k_{AB}=\dfrac{4}{y_3+y_4}$, 直线 $MD: x=\dfrac{x_1-2}{y_1}\cdot y+2$, 代入抛物线方程可得 $y^2-\dfrac{4\left(x_1-2\right)}{y_1}\cdot y-8=0$, $\Delta>0, y_1y_3=-8$, 所以 $y_3=2y_2$, 同理可得 $y_4=2y_1$, 所以 $k_{AB}=\dfrac{4}{y_3+y_4}=\dfrac{4}{2\left(y_1+y_2\right)}=\dfrac{k_{MN}}{2}$, 又因为直线 MN, AB 的倾斜角分别为 α,β, 所以 $k_{AB}=\tan\beta=\dfrac{k_{MN}}{2}=\dfrac{\tan\alpha}{2}$.

若要使 $\alpha-\beta$ 最大, 则 $\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$, 设 $k_{MN}=2k_{AB}=2k>0$, 则

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{k}{1+2k^2}=\frac{1}{\frac{1}{k}+2k}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{4},$$

当且仅当 $\dfrac{1}{k}=2k$, 即 $k=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 等号成立, 所以当 $\alpha-\beta$ 最大时, $k_{AB}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 设直线 $AB: x=\sqrt{2}y+n$, 代入抛物线方程可得 $y^2-4\sqrt{2}y-4n=0$, $\Delta>0$, $y_3y_4=-4n=4y_1y_2=-16$, 所以 $n=4$, 所以直线 $AB: x=\sqrt{2}y+4$.

(2) (解法 2 二次曲线系方法) 设直线 MN 方程为:

$x=m_1y+1$, 直线 AB 方程为: $x=m_2y+n$, 直线 AM 方程为: $x=m_3y+2$, 直线 BN 方程为: $x=m_4y+2$. 则经过 A、B、M、N 四点的二次曲线方程为: $y^2-4x+\omega(x-m_1y-1)(x-m_2y-n)=0$. 二次曲线 $\mu(x-m_3y-2)(x-m_4y-2)=0$ 也经过 A、B、M、N 四点. 令: $y^2-4x+\omega(x-m_1y-1)(x-m_2y-n)=\mu(x-m_3y-2)(x-m_4y-2)$.

比较式子两边 x^2 项, xy 项, x 项, y 项, 常数项的系数得:

$$\begin{cases}\omega=\mu, & ①\\ -\omega m_1-\omega m_2=-\mu m_3-\mu m_4, & ②\\ -4-\omega n-\omega=-4\mu, & ③\\ \omega m_1n+\omega m_2=2\mu m_3+2\mu m_4, & ④\\ \omega n=4\mu. & ⑤\end{cases}$$

由①⑤得 $n=4$, 代入③得 $4+5\omega=4\mu$, 结合①得 $\omega=\mu=-4$, 代入④得 $4m_1+m_2=2(m_3+m_4)$, 又由②得 $m_1+m_2=m_3+m_4$, 从而有 $4m_1+m_2=2m_1+2m_2$, 于是

$$m_1=\frac{1}{2}m_2, \quad ⑥$$

直线 MN 的斜率为 $\tan\alpha=\frac{1}{m_1}$, 直线 AB 的斜率为 $\tan\beta=\frac{1}{m_2}$, 则 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{m_1}-\frac{1}{m_2}}{1+\frac{1}{m_1}\cdot\frac{1}{m_2}}$.

将⑥代入上式, 整理得 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{m_2}{m_2^2+2}$.

利用导数易求得函数 $f(x)=\frac{x}{2+x^2}$ 在 $x=\sqrt{2}$ 处取到最大值 $\frac{\sqrt{2}}{4}$. 所以当 $\tan(\alpha-\beta)$ 取到最大, 即 $\alpha-\beta$ 取到最大时, $m_2=\sqrt{2}$. 此时直线 AB 的方程为 $x=m_2y+n$, 即 $x=\sqrt{2}y+4$.

小结 (1) 第 (2) 问实质上是一个定值问题, 直线 MN 的斜率 k_1 和直线 AB 的斜率 k_2 之比 $\frac{k_2}{k_1}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{1}{2}$.

(2) 解决第 (2) 问常规解法是用 A,B,M,N 四点的坐标来表示直线 AB 和 MN 的斜率以及直线 MD 和 ND 的方程, 与抛物线联立方程结合韦达定理, 通过一系列的运算和推导得出结论.

(3) 使用二次曲线系的方法, 直接设四条直线方程, 并不需要和抛物线联立方程求解. 使用直线 AB 和 MN 以及 AM 和 BN 建立两个退化二次曲线. 最后只需要 x^2 项, xy 项, x 项, y 项, 常数项的系数就可以顺利快速的得到 $\frac{m_1}{m_2}=\frac{1}{2}$.

注 限于篇幅, 后面的例子不再展示常规解法.

真题 2 (2021 年高考全国 I 卷) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $F_1(-\sqrt{17},0)$, $F_2(\sqrt{17},0)$, 点 M 满足 $|MF_1|-|MF_2|=2$. 记 M 的轨迹为 C.

(1) 求 C 的方程;

(2) 设点 T 在直线 $x=\frac{1}{2}$ 上, 过 T 的两条直线分别交 C 于 A,B 两点和 P,Q 两点, 且 $|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$. 求直线 AB 的斜率与直线 PQ 的斜率之和.

解析 (1) C 的方程为: $x^2-\frac{y^2}{16}=1(x\geqslant 1)$. (过程从略)

(2)(二次曲线系方法) 因为 $|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$, 由圆幂定理知 A,B,P,Q 四点共圆. 设点 $T(\frac{1}{2},t)$, 直线 AB 方程为 $y-t=k_1(x-\frac{1}{2})$, 即 $y-k_1x+\frac{1}{2}k_1-t=0$, 设直线 PQ 方程为 $y-t=k_2(x-\frac{1}{2})$, 即 $y-k_2x+\frac{1}{2}k_2-t=0$. 可设过 A,B,P,Q 的圆方程为

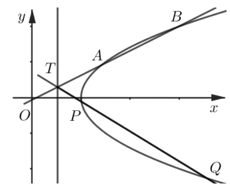

图 2

$$x^2-\frac{y^2}{16}-1+\mu(y-k_1x+\frac{1}{2}k_1-t)(y-k_2x+\frac{1}{2}k_2-t)=0.$$

利用 x^2 项与 y^2 项系数相等, 以及 xy 项的系数为 0, 得

$$\begin{cases}1+\mu k_1k_2=-\frac{1}{16}+\mu, & ①\\ -k_1\mu-k_2\mu=0. & ②\end{cases}$$

由②得 $\mu=0$ 或 $k_1+k_2=0$. 若 $\mu=0$, 代入①得到 $1=-\frac{1}{16}$, 矛盾结果, 故有 $k_1+k_2=0$.

小结 (1) 这道题第 (2) 问实质上也是一个定值问题, 直线 AB 的斜率 k_1 和直线 MN 的斜率 k_2 之和 $k_1+k_2=0$.

(2) 常规解法是设 A,B,P,Q 四点的坐标和直线 AB 和 PQ 的斜率, 以及直线 MD 和 ND 的方程与抛物线联立方程, 结合韦达定理, 通过一系列的运算和推导得出结论.

(3) 使用二次曲线系的方法, 由圆幂定理, 把条件 $|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$ 转化为四点共圆问题, 使用直线 AB 和 PQ 建立一个退化二次曲线. 最后利用 x^2 项与 y^2 项系数相等, 以及 xy 项的系数为 0 即可快速得到结论.

真题 3 (2019 年高考全国 II 卷理科) 已知点 $A(-2,0)$, $B(2,0)$, 动点 $M(x,y)$ 满足直线 AM 与 BM 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$. 记 M 的轨迹为曲线 C.

(1) 求 C 的方程, 并说明 C 是什么曲线;

(2) 过坐标原点的直线交 C 于 P,Q 两点, 点 P 在第一象限, $PE\perp x$ 轴, 垂足为 E, 连结 QE 并延长交 C 于点 G. (i) 证明: ΔPOG 是直角三角形; (ii) 求 ΔPOG 面积的最大值.

解析 (1) C 的方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\,(|x|\neq 2)$, 所以 C 为中心在坐标原点, 焦点在 x 轴上的椭圆, 不含左右顶点. (过程从略)

(2) (i) (二次曲线系方法) 如图, 设 $E(t,0)$, 设直线 PQ 方程为 $y=k_1x(k_1>0)$. 延长 PE 交椭圆于 P', 连接 $P'Q$, 则 $P(t,k_1t),Q(-t,-k_1t)$. 直线 QG 的斜率 $k_{QG}=\dfrac{0+k_1t}{t+t}=\dfrac{k_1}{2}$, 所以直线 QG 的方程为 $y=\dfrac{k_1}{2}(x-t)$, 即 $k_1x-2y-k_1t=0$.

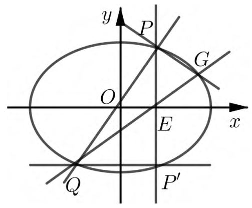

图 3

设直线 PG 方程为 $y-k_1t=k_2(x-t)$, 即 $k_2x-y+k_1t-k_2t=0$. 直线 $P'Q$ 方程为 $y+k_1t=0$, 直线 $P'P$ 方程为 $x-t=0$, 则过 P,Q,P',G 四点的二次曲线系为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}-1+\omega(y+k_1t)(k_2x-y+k_1t-k_2t)=0$. 二次曲线 $\mu(x-t)(k_1x-2y-k_1t)=0$ 也过 P、Q、P'、G 四点, 令

$$\begin{aligned}&\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}-1+\omega(y+k_1t)(k_2x-y+k_1t-k_2t)\\=&\mu(x-t)(k_1x-2y-k_1t).\end{aligned}$$

比较式子两边 x^2 项、y^2 项和 xy 项的系数, 得

$$\begin{cases}\dfrac{1}{4}=\mu k_1\\\dfrac{1}{2}-\omega=0\\\omega k_2=-2\mu\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\omega=\dfrac{1}{2}\\k_1=\dfrac{1}{4\mu}\\k_2=-4\mu\end{cases}\Rightarrow k_1k_2=-1,$$

所以 $PQ\perp PG$, 即 ΔPQG 是直角三角形.

小结 (1) 这道题第 (2) 小题第一问本质是一个定值问题, 证明 $k_1k_2=-1$. 常规解法是用 PQ 的斜率来表示 P,Q,G 的坐标, 联立方程通过繁琐的运算得出结论.

(2) 使用二次曲线系的方法, 设定点和线方程之后并不需要和椭圆联立方程求解.

(3) 椭圆上只有 3 个点, 通过引入 P 关于 x 轴的对称点 P'(也是 Q 关于 y 轴的对称点), 再使用直线 QG 和 PP' 以及 PG 和 QP' 建立两个退化二次曲线. 最后只需要 x^2 项、y^2 项和 xy 项的系数就足以帮助我们得到需要的结论.

(二) 定点问题

真题 4 (2020 年高考 I 卷理科) 已知 A、B 分别为椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 的左、右顶点, G 为 E 的上顶点, $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=8$, P 为直线 $x=6$ 上的动点, PA 与 E 的另一交点为 C, PB 与 E 的另一交点为 D.

(1) 求 E 方程;

(2) 证明: 直线 CD 过定点.

解析 (1) 曲线 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$. (过程从略)

(2) (二次曲线系方法) 设直线 CD 方程为 $y=kx+m$. 直线 AB 方程为 $y=0$. 设点 $P(6,t)\ (t\neq0)$, 则 $k_{PA}=\dfrac{t-0}{6+3}=\dfrac{t}{9}$, 得直线 PA 方程为 $y=\dfrac{t}{9}(x+3)$. 同理可得直线 PB 方程为 $y=\dfrac{t}{3}(x-3)$. 则过 A,B,C,D 四点的二次曲线为:

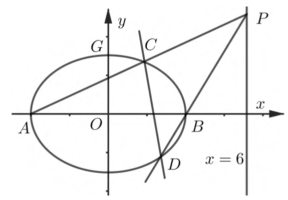

图 4

$$\frac{x^2}{9}+y^2-1+\omega(y-\frac{t}{9}x-\frac{t}{3})(y-\frac{t}{3}x+t)=0.$$

曲线 $\mu(y-kx-m)y=0$ 也过 A,B,C,D 四点, 令

$$\frac{x^2}{9}+y^2-1+\omega(y-\frac{t}{9}x-\frac{t}{3})(y-\frac{t}{3}x+t)=\mu(y-kx-m)y.$$

比较式子两边的 xy 项和 y 项的系数得

$$\begin{cases}-\dfrac{t\omega}{9}-\dfrac{t\omega}{3}=-k\mu\\\omega t-\dfrac{\omega t}{3}=-m\mu\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4t\omega=9k\mu\\2\omega t=-3m\mu\end{cases}\Rightarrow m=-\frac{3}{2}k\ ,$$

所以直线 CD 方程为 $y=kx+m$, 即 $y=k(x-\dfrac{3}{2})$. 所以直线 CD 过定点 $(\dfrac{3}{2},0)$.

小结 (1) 这道题第二问实质上是一个定点问题.

(2) 使用二次曲线系的方法, 直接设 4 条直线方程, 并不需要和椭圆联立方程求解. 使用直线 AB 和 CD 以及 AP 和 BP 建立两个退化二次曲线. 最后只需要用到 xy 项和 y 项的系数就快速得到结论.

(三) 求曲线方程

真题 5 (2018 年高考课标 II 卷理科) 设抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F, 过 F 且斜率为 $k(k>0)$ 的直线 l 与 C 交于 A,B 两点, $|AB|=8$.

(1) 求 l 的方程;

(2) 求过点 A,B 且与 C 的准线相切的圆的方程.

解析 (二次曲线系方法) 所求圆方程经过 A,B 两点, 而 A,B 是抛物线 $C:y^2=4x$ 和直线 $l:y=x-1$ 的交点, 故可设所求圆方程为 $\mu(y^2-4x)+(x-y-1)(x+y+m)=0$. 利用圆中 x^2 项和 y^2 项系数相等, 得到 $1=\mu-1,\mu=2$. 再利用此圆与抛物线 $C:y^2=4x$ 的准线: $x=-1$ 相切, 把 $x=-1$ 代入圆方程得到: $y^2-(m+1)y+10-2m=0$. 由 $\Delta=(m+1)^2-4(10-2m)=0$, 解得 $m=3$ 或 $m=-13$, 所以圆方程为: $x^2+y^2-6x-4y-3=0$ 或 $x^2+y^2-22x-12y+13=0$.

小结 该题条件并不复杂, 用常规方法也能较快得出结论, 在此展示二次曲线系方法, 作为求曲线方程的一个参考.

三、总结提升

隐藏在圆锥曲线中的“恰到好处”

江苏省南京市燕子矶中学 (210038) 卢荣亮 陈 慧

摘要 本文应用类比推广的方法, 在前人研究成果的基础上, 由圆锥曲线光学性质出发, 意外获得与之相关的几个“恰到好处”的新发现.

关键词 类比推广; 圆锥曲线; 光学性质; 恰到好处

1. 椭圆中的恰好相切

以下引理 1-5 是为了证明性质 1 服务的, 其中切割线定理的逆定理比较常见, 但由于没有查到相关文献, 因此笔者给了一个常规证明.

引理 1[1] (圆锥曲线的光学性质) 由焦点发出的光线经椭圆曲面反射后的光线必经过另一焦点, 且经过反射点的镜面所在的直线为椭圆的切线; 由焦点发出的光线经双曲线曲面反射后的光线所在直线必经过另一焦点, 且经过反射点的镜面所在的直线为双曲线的切线.

引理 2[2] 如图 1, 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$, F_1, F_2 分别是椭圆的左右焦点, P 是椭圆上任意一点 (长轴两端点除外), $\angle F_1PF_2$ 的平分线交 x 轴于点 Q, 过 Q 作 $QM\perp PF_1$ 交直线 PF_1 于点 M, 则 PM 的长度为定值 $\dfrac{b^2}{a}$.

引理 3[3] 如图 1, 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 中, $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ 为其左右焦点, P 是椭圆上不同于长轴顶点的任意一点, $\angle F_1PF_2$ 的平分线交 x 轴于点 Q, 交 y 轴于点 R, 过 R 作 $RN\perp PF_1$ 交直线 PF_1 于点 N, 则 $|PN|=a$.

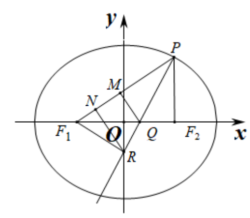

图 1

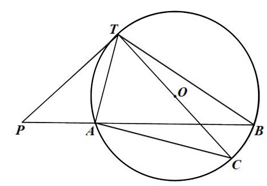

图 2

引理 4[4] 如图 1, 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 中, $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ 为其左右焦点, P 是椭圆上不同于长轴顶点的任意一点, $\angle F_1PF_2$ 的平分线交 x 轴于点 Q, 交 y 轴于点 R, 则 $\dfrac{|RF_1|}{|RP|}=e$(e 为椭圆的离心率).

引理 5 (切割线定理的逆定理) 已知 ΔABT 的 AB 边延长线上有一点 P, 满足 $|PT|^2=|PA|\,|PB|$, 则 PT 与 ΔABT 的外接圆相切于 T 点.

从上面五道高考题我们可以发现, 解析几何的基本思想是用代数的手段来研究几何问题. 我们常规的操作步骤是“三部曲”: (1) 首先将几何问题代数化; (2) 其次将代数问题坐标化 (坐标化的终极目标是得到纯 x_1+x_2,x_1x_2 或 y_1+y_2,y_1y_2 的代数式); (3) 最后利用韦达定理代入, 化简得出答案.

常规解法的优点是具有比较强的模式化, 易于操作, 是我们解决圆锥曲线问题的首要选择. 它需要我们的学生要有非常强大的运算能力. 诚然, 运算是数学核心素养的重要组成部分, 而圆锥曲线则是运算训练的最重要载体, 是运算训练的主战场. 我们在学习圆锥曲线时, 千万不能错过这种训练. 然而, 面向高考, 在有限时间内, 这种过于繁琐的运算要求对考生并不友好. 因此, 我们要学会运算, 更要学会将问题简单化, 避免繁杂的运算.

波利亚在《数学的发现》的序言中说: “中学数学教学的首要任务是加强解题训练. ”他把解题作为培养学生数学才能和教会他们思考的一种重要手段和途径. 解题意味着要找到克服困难的方法, 找到绕过障碍的道路, 达到不能直接达到的目的. 本文则具体展示了在面对一些复杂的圆锥曲线问题, 当常规方法效果不佳时, 二次曲线系往往能有效快速地解决.

利用二次曲线系解题的过程, 实质上就是利用二次曲线的一些特征, 比如圆的方程中 x^2 项和 y^2 项系数相等, 没有 xy 项; 或者是比较两个多项式的系数等, 来找到所引入的参数的关系. 这样就避免了联立方程和韦达定理以及海量的运算, 是解决一些圆锥曲线问题的快速有效的方法. 二次曲线系就像一锅乱炖, 把多点、多线和复杂几何关系的圆锥曲线问题放在一个锅中乱炖, 虽不精致但却美味可口. 面向高考, 对于有志于完成解析几何压轴题的同学, 不妨引导他们对这个方法进行尝试.

参考文献

[1] 单墫, 熊斌. 奥数教程 (第六版) [M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2014.

[2] 苏立标. 圆锥曲线的秘密 [M]. 杭州: 浙江大学出版社, 2021.

[3] 陈俊艺. 例谈二次曲线系方程在解析几何中的应用 [J]. 中学数学研究 (华南师范大学版 (上)), 2021(12): 18-20.