三角函数的图像与性质答案与解析

1. C 【**解析**】本题考查三角函数的图像与性质. 因为函数$f(x)=\sin(2x+\varphi)(\varphi>0)$的图像关于点$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$对称,所以$2\times\frac{\pi}{3}+\varphi=k\pi,k\in\mathbf{N}^*$,解得$\varphi=k\pi-\frac{2\pi}{3},k\in\mathbf{N}^*$. 当$k=1$时,$\varphi$取得最小值$\frac{\pi}{3}$,故选C.

2. C 【解析】本题考查三角函数图像的平移变换. 因为 $y=\sin 3x+\cos 3x=\sqrt{2}\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$，所以将其图像向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度，可得 $y=\sqrt{2}\sin\left[3\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=\sqrt{2}\sin(3x+\pi)=-\sqrt{2}\sin 3x$ 的图像，故选 C.

3. A 【解析】本题考查正弦型函数的性质. 若 $\omega=2$，则 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$，函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}=\frac{2\pi}{2}=\pi$，所以"$\omega=2$"不是"$f(x)$ 的最小正周期是 π"的充分条件. 若 $f(x)$ 的最小正周期是 π，则有 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}=\pi$，解得 $|\omega|=2$，即 $\omega=\pm 2$，所以"$\omega=2$"不是"$f(x)$ 的最小正周期是 π"的必要条件. 故"$\omega=2$"是"$f(x)$ 的最小正周期是 π"的充分不必要条件. 故选 A.

4. D 【解析】本题考查三角函数图像与性质. 对于选项 A，因为 $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right|\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2|\cos x|\sin x\neq f(x)$，所以直线 $x=\frac{\pi}{4}$不是 $f(x)$ 图像的对称轴，选项 A 错误；对于选项 B，因为 $f(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$，$f(-x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数，所以不可能在$\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$上单调递增，选项 B 错误；对于选项 C，因为 $f(x+\pi)=2|\sin(x+\pi)|\cos(x+\pi)=-2|\sin x|\cos x\neq f(x)$，所以 π 不是 $f(x)$ 的最小正周期，选项 C 错误；对于选项 D，当 $x\in(0,\pi)$，$f(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$，作出图像可知其在 $(0,\pi)$ 上有两个极值点，选项 D 正确. 故选 D.

5. B 【解析】本题考查三角函数的图像与性质. $f(x)=2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$，令 $x+\frac{\pi}{3}=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，令 $k=0$，则 $x=-\frac{\pi}{3}$，由题意，要使 $-\frac{\pi}{3}\in(-a,a)$，则 $a>\frac{\pi}{3}$，故选 B.

6. D 【解析】本题考查三角函数图像的对称性和极值. $f(x)=a\sin x-\sqrt{3}\cos x=\sqrt{a^2+3}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+3}}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+3}}\cos x\right)=\sqrt{a^2+3}\cdot(\cos\varphi\sin x-\sin\varphi\cos x)=\sqrt{a^2+3}\sin(x-\varphi)\left(\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+3}},\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+3}}\right)$. ∵ 直线 $x=\frac{5\pi}{6}$是函数$f(x)$图像的一条对称轴，∴ $\frac{5\pi}{6}-\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，∴ $\varphi=\frac{\pi}{3}-k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$. 当 $k=0$ 时，$\varphi=\frac{\pi}{3}$，$\tan\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\frac{\sqrt{3}}{a}=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，∴ $a=1$，$f(x)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$. 又$f(x_1)\cdot f(x_2)=-4$，∴ x_1 和 x_2 分别是函数$f(x)$的极大值点和极小值点，不妨设 $x_1-\frac{\pi}{3}=2k_1\pi+\frac{\pi}{2}(k_1\in\mathbf{Z})$，$x_2-\frac{\pi}{3}=2k_2\pi-\frac{\pi}{2}(k_2\in\mathbf{Z})$，∴ $x_1+x_2=2(k_1+k_2)\pi+\frac{2\pi}{3}(k_1,k_2\in\mathbf{Z})$，∴ 当 $k_1+k_2=0$ 时，$|x_1+x_2|$的最小值为$\frac{2\pi}{3}$，故选 D.

7. D 【解析】本题考查三角函数的图像与性质. $f(x)=\sin x(\sin x-\cos x)=\sin^2 x-\sin x\cos x=\frac{1-\cos 2x}{2}-\frac{\sin 2x}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}$.

对于 A，$f(x)_{\max}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}$，故 A 错误；对于 B，当 $x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{8}\right)$时，令 $t=2x+\frac{\pi}{4}$，$t\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，而此时 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t+\frac{1}{2}$在$\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减，故 $f(x)$ 在区间$\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{8}\right)$上单调递减，故 B 错误；对于 C，令 $2x+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，解得 $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，而不存在整数 k，使得$\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$，故 C 错误；对于 D，令 $2x+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，解得 $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，给 k 赋值，当 $k=0,1,2,3$ 时，$x=\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{8},\frac{9\pi}{8},\frac{13\pi}{8}$，为函数的极值点，且在区间$[0,2\pi)$内，符合题意. 故选 D.

8. D 【解析】本题考查三角函数的性质及三角恒等变换. 根据题意，函数$f(x)$应满足：①$f(x)$的最小正周期为π；②对任意的$x\in\mathbf{R}$，都有$f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+f(-x)=0$，用$x+\frac{\pi}{8}$替换式中的$x$可得$f\left(x-\frac{\pi}{8}\right)+f\left(-x-\frac{\pi}{8}\right)=0$，即函数的图像关于点$\left(-\frac{\pi}{8},0\right)$对称；③$f(x)$在$\left(\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减. 对于A，$f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{8}\right)$的最小正周期$T=2\pi$，不符合性质①，故不满足题意. 对于B，$f(x)=\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$，令$2x-\frac{\pi}{4}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得$x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，不存在整数$k$使$x=-\frac{\pi}{8}$，故不符合性质②，故不满足题意. 对于C，$f(x)=\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$，令$2x=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得$x=\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，不存在整数$k$使$x=-\frac{\pi}{8}$，故不符合性质②，故不满足题意. 对于D，$f(x)=\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，最小正周期$T=\pi$，符合性质①；令$2x+\frac{\pi}{4}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得$x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，显然当$k=0$时符合性质②；令$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得$\frac{\pi}{8}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{8}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，显然当$k=0$时，$f(x)$的一个减区间为$\left(\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{8}\right)$，而$\left(\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{2}\right)\subseteq\left(\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{8}\right)$，符合性质③. 故选D.

9. AD 【解析】本题考查三角函数的图像与性质. 由题意得$g(x)=f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2x$，则函数$g(x)$是偶函数，故A正确；易得$g(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上单调递减，在$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$上单调递增，故B错误；由于$g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0$，故$g(x)$的图像关于点$\left(\frac{\pi}{4},0\right)$对称，故C错误；当$x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$时，令$2x\in\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$，故$\cos 2x\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$，则函数$g(x)$的值域是$\left[-\frac{1}{2},1\right]$，故D正确. 故选AD.

10. ABC 【解析】本题考查三角函数的性质. $\because$函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，且$f(-x)=\sin(\cos(-x))-\cos(\sin(-x))=\sin(\cos x)-\cos(-\sin x)=\sin(\cos x)-\cos(\sin x)=f(x)$，$\therefore f(x)$为偶函数，故A正确；由$y=\sin x$和$y=\cos x$的最小正周期的最小公倍数为$2\pi$，可知B，C正确；又$\because f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)-\cos\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(-\frac{1}{2}\right)-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}<0$，故D错误. 故选ABC.

11. BCD 【解析】本题考查三角函数的图像及性质. 对于A选项，由题图可得函数$f(x)$的最小正周期$T=4\times\left(\frac{5}{4}-\frac{3}{4}\right)=2$，则$|f(x)|$的最小正周期为1，故A错误. 对于B选项，由题图易得函数$f(x)$图像的对称中心为$\left(\frac{3}{4}+k,0\right)$，$k\in\mathbf{Z}$，从而当$k=-3$时，对称中心为$\left(-\frac{9}{4},0\right)$，故B正确. 对于C选项，由$A=1$，$\omega=\pi$，$f\left(\frac{5}{4}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{4}+\varphi\right)=-1$，得$\frac{5\pi}{4}+\varphi=\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得$\varphi=-\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，又$-\frac{\pi}{2}<\varphi<0$，所以$\varphi=-\frac{\pi}{4}$，从而$f(x)=\cos\left(\pi x-\frac{\pi}{4}\right)$，将其图像向左平移$\frac{3}{2}$个单位长度后得到函数$y=\cos\left[\pi\left(x+\frac{3}{2}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{4}\right)$的图像，故C正确. 对于D选项，由$f(x)$的极大值点为$x=\frac{1}{4}+2k,k\in\mathbf{Z}$，$f(x)$在区间$[0,m]$上有且仅有3个极大值点，可得$\frac{17}{4}<m\leqslant\frac{25}{4}$，故$-\frac{3}{4}\leqslant-\frac{3m}{25}<-\frac{51}{100}$，又$f(x)$在$\left[-\frac{3}{4},0\right]$上单调递增，所以函

数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{3m}{25},0\right]$ 上单调递增，故 D 正确. 故选 BCD.

12. 2 【**解析**】本题考查已知三角函数性质求参数范围. 因为 $f(x)=a\sin\omega x+\cos\omega x=\sqrt{a^2+1}\sin(\omega x+\varphi)$ $\left(\text{其中}\tan\varphi=\frac{1}{a}\right)$，所以 $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{a^2+1}=2$，解得 $a=\sqrt{3}$ 或 $a=-\sqrt{3}$（舍去），所以 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$，当 $\omega x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 时，函数 $f(x)$ 取得最大值，则当 $x\geqslant0$ 时，前两个最大值分别为 $k=0$ 和 $k=1$. 当 $k=1$ 时，由 $\omega x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2\pi$，得 $x=\frac{7\pi}{3\omega}\leqslant7$，所以 $\omega\geqslant\frac{\pi}{3}$，所以 ω 的最小整数值为 2.

13.【**解**】本题考查三角恒等变换、三角函数的性质及值域.

(1) 因为 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3}-2x\right)-4\cos^2x+3$

$=\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{3}\cos2x-\sqrt{3}\cos\frac{2\pi}{3}\sin2x-4\times\frac{\cos2x+1}{2}+3$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x-\frac{1}{2}\cos2x+1$

$=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+1$,

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2) 因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{12},\frac{2\pi}{3}\right]$,

所以 $2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{6}\right]$，所以 $-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant1$,

所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{12},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上的值域为 $\left[1-\frac{\sqrt{3}}{2},2\right]$.