

江苏省仪征中学 2022-2023 学年度第一学期高三数学综合训练 (11)

一、选择题. 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 命题: “ $\forall x \in (-\infty, 0), 3^x \geq 4^x$ ” 的否定为 ()

- A. $\exists x_0 \in [0, +\infty), 3^{x_0} < 4^{x_0}$ B. $\exists x_0 \in [0, +\infty), 3^{x_0} \leq 4^{x_0}$
C. $\exists x_0 \in (-\infty, 0), 3^{x_0} < 4^{x_0}$ D. $\exists x_0 \in (-\infty, 0), 3^{x_0} \leq 4^{x_0}$

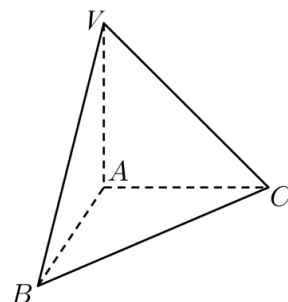
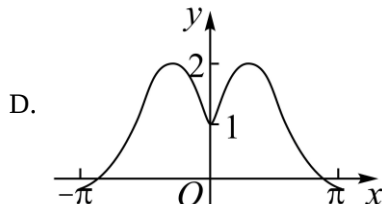
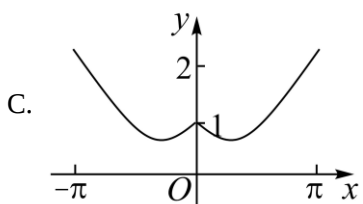
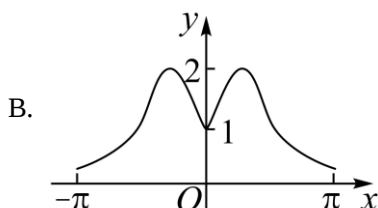
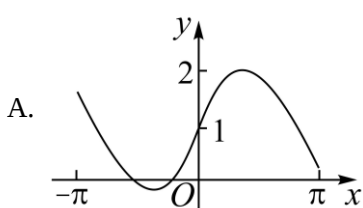
2. 已知集合 $A = \{x | -2 < x < 1\}$, $B = \{x | y = \lg x\}$, 则 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B =$ ()

- A. $(-\infty, 1)$ B. $[1, +\infty)$ C. $(-2, 0]$ D. $(0, 1)$

3. 已知正实数 a, b, c 满足 $\log_2 a = \log_3 b = \log_6 c$, 则 ()

- A. $a = bc$ B. $c = ab$ C. $b^2 = ac$ D. $c^2 = ab$

4. 函数 $f(x) = \frac{e^{|x|}}{\cos x + x^4}$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的图像大致为 ()



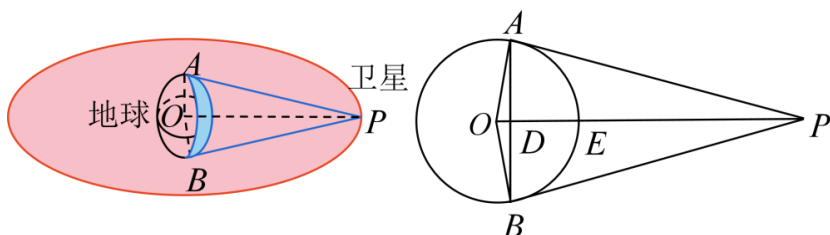
5. 如图, 三棱锥 $V-ABC$ 中, $VA \perp$ 底面 ABC , $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC = AV = 2$, 则该三棱锥 内切球和外接球的半径之比为 ()

- A. $(2 - \sqrt{3}) : 1$ B. $(2\sqrt{3} - 3) : 1$ C. $(\sqrt{3} - 1) : 3$ D. $(\sqrt{3} - 1) : 2$

6. “碳中和”是指企业、团体或个人等测算在一定时间内直接或间接产生的温室气体排放总量, 通过植树造林、节能减排等形式, 以抵消自身产生的二氧化碳排放量, 实现二氧化碳“零排放”. 某“碳中和”研究中心计划派 5 名专家分别到 A, B, C 三地指导“碳中和”工作, 每位专家只去一个地方, 且每地至少派驻 1 名专家, 则分派方法的种数为 ()

- A. 90 B. 150 C. 180 D. 300

7. 北斗三号全球卫星导航系统是我国航天事业的重要成果. 在卫星导航系统中, 地球静止同步卫星的轨道位于地球赤道所在平面, 将地球看作一个球, 卫星信号像一条条直线一样发射到达球面, 所覆盖的范围即为一个球冠, 称此球冠的表面积为卫星信号的覆盖面积. 球冠即球面被平面所截得的一部分, 截得的圆叫做球冠的底, 垂直于截面的直径被截得较短的一段叫做球冠的高. 设球面半径为 R , 球冠的高为 h , 则球冠的表面积为 $S = 2\pi Rh$. 已知一颗地球静止同步通信卫星距地球表面的最近距离与地球半径之比为 5, 则它的信号覆盖面积与地球表面积之比为 ()



- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{5}{12}$

8. 已知实数 $a, b, c \in \mathbb{R}$, 满足 $\frac{\ln a}{e^a} = \frac{b}{e^b} = -\frac{c}{e^c}, b > 1$, 则 a, b, c 大小关系为()
- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $b > c > a$ D. $b > a > c$

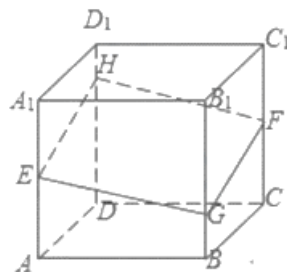
二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 定义：在平面直角坐标系 xOy 中，若某一个函数的图象向左或向右平移若干个单位长度后能得到另一个函数的图象，则称这两个函数互为“原形函数”. 下列四个选项中，函数 $y = f(x)$ 和函数 $y = g(x)$ 互为“原形函数”的是()

- A. $f(x) = \sin x, g(x) = \cos(-x)$ B. $f(x) = \frac{4}{2^x}, g(x) = 2^{-x}$
 C. $f(x) = \ln x, g(x) = \ln \frac{x}{e^5}$ D. $f(x) = \frac{1}{x-1}, g(x) = 1 - \frac{x-3}{x-2}$
10. 已知函数 $f(x) = \sin(2x + \varphi) (0 < \varphi < \pi)$, 曲线 $y = f(x)$ 关于点 $(-\frac{\pi}{12}, 0)$ 中心对称, 则()
- A. $f(x)$ 的最小正周期是 π B. $f(x)$ 在 $(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{6})$ 上单调递增
 C. $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12})$ 上有 2 个极值点 D. 曲线 $y = f'(x)$ 关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称

11. 如图, 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, E, F 分别是棱 AA_1, CC_1 的中点, 过点 E, F 的平面分别与棱 BB_1, DD_1 交于点 G, H , 以下四个结论正确的是. ()

- A. 正方体外接球的表面积为 3π
 B. 平面 $EGFH$ 与平面 $ABCD$ 所成角的最大值为 $\frac{\pi}{4}$
 C. 四棱锥 $C_1 - EGFH$ 的体积为定值
 D. 点 B_1 到平面 $EGFH$ 的距离的最大值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$



12. 已知直线 $l: y = ax - 1$, 曲线 $C_1: f(x) = e^{x+1} + 1$, 曲线 C_1 关于直线 $y = x + 1$ 对称的曲线 C_2 所对应的函数为 $y = g(x)$, 则以下说法正确的是()

- A. 不论 a 为何值, 直线 l 恒过定点 $(0, -1)$
 B. $g(x) = \ln x - 1$
 C. 若直线 l 与曲线 C_2 相切, 则 $a = 1$
 D. 若直线 l 上有两个关于直线 $y = x + 1$ 对称的点在曲线 C_1 上, 则 $0 < a < 1$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 某圆台下底半径为 2, 上底半径为 1, 母线长为 2, 则该圆台的表面积为_____.

14. 若 $\sin \alpha = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$, 则 $\tan 2\alpha$ 的值为_____.

15. 已知 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 且 $f(x) + f(2-x) = 0$, 当 $-1 < x < 0$ 时, $f(x) = 2^x$, 则 $f(2 + \lg \frac{5}{2})$ 的值为_____.

16. 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中, 三元二次方程所对应的曲面统称为二次曲面. 比如方程 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 表示球面, 就是一种常见的二次曲面. 二次曲面在工业、农业、建筑等众多领域应用广泛. 已知点 $P(x, y,$

$z)$ 是二次曲面 $4x^2 - xy + y^2 - z = 0$ 上的任意一点, 且 $x > 0, y > 0, z > 0$, 则当 $\frac{z}{xy}$ 取得最小值时,

$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right)$ 的最大值为_____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_4=9$, $S_3=15$.

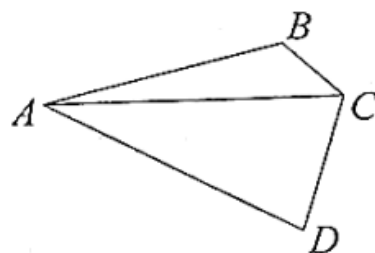
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 保持数列 $\{a_n\}$ 中各项先后顺序不变, 在 a_k 与 a_{k+1} ($k=1,2,\dots$) 之间插入 2^k 个 1, 使它们和原数列的项构成一个新的数列 $\{b_n\}$, 记 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 T_{100} 的值.

18. (12 分) 如图, 四边形 $ABCD$ 中, $AB^2 + BC^2 + AB \cdot BC = AC^2$.

(1) 若 $AB=3BC=3$, 求 $\triangle ABC$ 的面积;

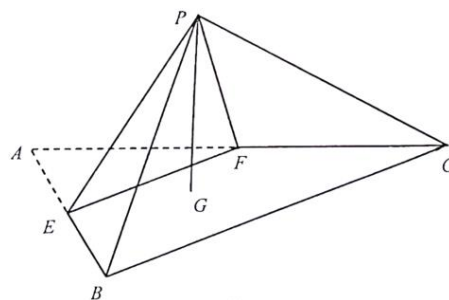
(2) 若 $CD = \sqrt{BC}$, $\angle CAD = 30^\circ$, $\angle BCD = 120^\circ$, 求 $\angle ACB$ 的值.



19. (12 分) 如图, $\triangle ABC$ 是边长为 $4\sqrt{3}$ 的等边三角形, E, F 分别为 AB, AC 的中点, G 是 $\triangle ABC$ 的中心, 以 EF 为折痕把 $\triangle AEF$ 折起, 使点 A 到达点 P 的位置, 且 $PG \perp$ 平面 ABC .

(1) 证明: $PB \perp AC$;

(2) 求平面 PEF 与平面 PBF 所成二面角的正弦值.



20. (12 分) 目前, 全国多数省份已经开始了新高考改革. 改革后, 考生的高考成绩由语文、数学、外语 3 门全国统一考试科目成绩和 3 门选择性科目成绩组成. 注: 甲、乙两名同学对选择性科目的选择是随机的.

(1) A 省规定: 选择性考试科目学生可以从思想政治、历史、地理、物理、化学、生物 6 门科目中任选 3 门参加选择性考试. 求甲同学在选择物理科目的条件下, 选择化学科目的概率;

(2) B 省规定: 3 门选择性科目由学生首先从物理科目和历史科目中任选 1 门, 再从思想政治、地理、化学、生物 4 门科目中任选 2 门.

①求乙同学同时选择物理科目和化学科目的概率;

②为调查学生的选科情况, 从某校高二年级抽取了 10 名同学, 其中有 6 名首选物理, 4 名首选历史. 现从这 10 名同学中再选 3 名同学做进一步调查. 将其中首选历史的人数记作 X , 求随机变量 X 的分布列和数学期望.

21. (12 分) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的实轴长为 2. 点 $(\sqrt{7}, -1)$ 是抛物线 $E: x^2 = 2py$ 的准线与 C 的一个交点.

(1) 求双曲线 C 和抛物线 E 的方程;

(2) 过双曲线 C 上一点 P 作抛物线 E 的切线, 切点分别为 A, B . 求 $\triangle PAB$ 面积的取值范围.

22. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - x - \ln x (a \in \mathbf{R})$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $x \geq 1$, $|f(x)| \geq 2$, 求 a 的取值范围;

(3) 证明: $\sum_{k=2}^n \frac{1}{\ln k} > 1 - \frac{1}{n}$.

江苏省仪征中学 2022-2023 学年度第一学期高三数学综合训练 (11)

一、选择题. 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 命题: “ $\forall x \in (-\infty, 0), 3^x \geq 4^x$ ” 的否定为 ()

A. $\exists x_0 \in [0, +\infty), 3^{x_0} < 4^{x_0}$

B. $\exists x_0 \in [0, +\infty), 3^{x_0} \leq 4^{x_0}$

C. $\exists x_0 \in (-\infty, 0), 3^{x_0} < 4^{x_0}$

D. $\exists x_0 \in (-\infty, 0), 3^{x_0} \leq 4^{x_0}$

【答案】C

【解析】【分析】根据全称命题的否定是特称命题进行判断即可.

【详解】解: 命题 “ $\forall x \in (-\infty, 0), 3^x \geq 4^x$ ” 是全称命题, 则命题的否定是特称命题

即 $\exists x_0 \in (-\infty, 0), 3^{x_0} < 4^{x_0}$, 故选: C.

2. 已知集合 $A = \{x | -2 < x < 1\}$, $B = \{x | y = \lg x\}$, 则 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B =$ ()

A. $(-\infty, 1)$

B. $[1, +\infty)$

C. $(-2, 0]$

D. $(0, 1)$

【答案】B

【解析】【分析】求出集合 A 的补集, 化简集合 B, 再根据交集的概念可求出结果.

【详解】因为 $A = \{x | -2 < x < 1\}$, 所以 $\complement_{\mathbb{R}} A = (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$,

又 $B = \{x | y = \lg x\} = (0, +\infty)$,

所以 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B = [1, +\infty)$. 故选: B

3. 已知正实数 a, b, c 满足 $\log_2 a = \log_3 b = \log_6 c$, 则 ()

A. $a = bc$

B. $c = ab$

C. $b^2 = ac$

D. $c^2 = ab$

【答案】B

【分析】本题主要对数与对数的运算, 指数与指数幂的运算, 属于基础题.

设 $\log_2 a = \log_3 b = \log_6 c = t$, 即 $a = 2^t, b = 3^t, c = 6^t$, 即可得 $c = ab$.

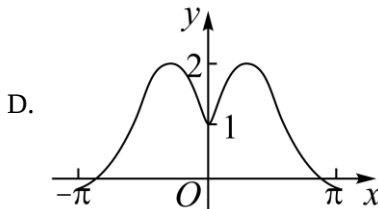
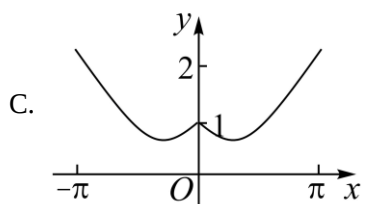
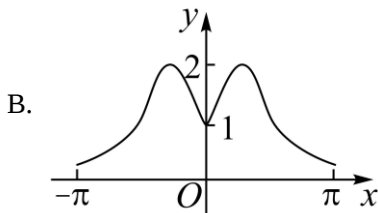
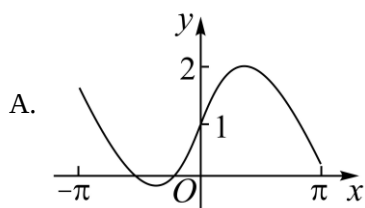
【解答】

解: $\because$ 正实数 a, b, c 满足 $\log_2 a = \log_3 b = \log_6 c$,

$\therefore$ 设 $\log_2 a = \log_3 b = \log_6 c = t$, 即 $a = 2^t, b = 3^t, c = 6^t$,

故 $c = ab$, 故选: B.

4. 函数 $f(x) = \frac{e^{|x|}}{\cos x + x^4}$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的图像大致为 ()



【答案】B

【解析】【分析】利用 $f(x)$ 的奇偶性和函数值的特点可选出答案.

【详解】因为 $f(-x) = \frac{e^{|-x|}}{\cos(-x) + (-x)^4} = \frac{e^{|x|}}{\cos x + x^4} = f(x)$, 所以 $f(x)$ 为偶函数, 其图像关于 y 轴对称, 排除 A 项;

当 $x = \pi$ 时, $f(\pi) = \frac{e^\pi}{\cos \pi + \pi^4} = \frac{e^\pi}{\pi^4 - 1} > 0$, 排除 D 项;

因为 $e^\pi < e^{3.5} = e^3 \sqrt{e}$, $\cos \pi + \pi^4 > -1 + 3^4 = 80$, 所以 $f(\pi) < 1$, 排除 C 项,

故选: B.

5. 如图, 三棱锥 $V-ABC$ 中, $VA \perp$ 底面 ABC , $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC = AV = 2$, 则该三棱锥 内切球和外接球的半径之比为 ()

A. $(2 - \sqrt{3}) : 1$

B. $(2\sqrt{3} - 3) : 1$

C. $(\sqrt{3} - 1) : 3$

D. $(\sqrt{3} - 1) : 2$

【答案】C

【解析】

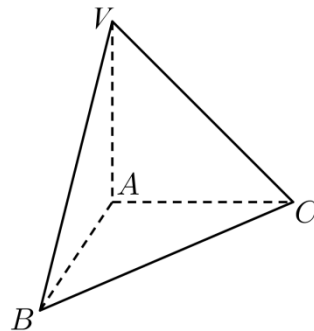
【分析】根据线面垂直的性质, 结合正方体的对角线长公式、棱锥的体积公式进行求解即可.

【详解】因为 $VA \perp$ 底面 ABC , $AB, AC \subset$ 底面 ABC , 所以 $VA \perp AB, VA \perp AC$,

又因为 $\angle BAC = 90^\circ$, 所以 $AB \perp AC$, 而 $AB = AC = AV = 2$,

所以三条互相垂直且共顶点的棱, 可以看成正方体中, 共顶点的长、宽、高,

因此该三棱锥外接球的半径 $R = \frac{1}{2} \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{3}$, 设该三棱锥的内切球的半径为 r ,



因为 $\angle BAC = 90^\circ$ ，所以 $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ ，

因为 $VA \perp AB, VA \perp AC$ ， $AB = AC = AV = 2$ ，所以

$$VB = VC = \sqrt{AV^2 + AB^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}，$$

由三棱锥的体积公式可得：

$$3 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \cdot r + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot r = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2 \Rightarrow r = \frac{3-\sqrt{3}}{3}，$$

$$\text{所以 } r:R = \frac{3-\sqrt{3}}{3}:\sqrt{3} = (\sqrt{3}-1):3，$$

故选：C

【点睛】关键点睛：根据该三棱锥的特点联想到正方体是解题的关键。

6. “碳中和”是指企业、团体或个人等测算在一定时间内直接或间接产生的温室气体排放总量，通过植树造林、节能减排等形式，以抵消自身产生的二氧化碳排放量，实现二氧化碳“零排放”。某“碳中和”研究中心计划派 5 名专家分别到 A, B, C 三地指导“碳中和”工作，每位专家只去一个地方，且每地至少派驻 1 名专家，则分派方法的种数为（ ）

A. 90

B. 150

C. 180

D. 300

【答案】B

【解析】

【分析】根据题意，运用分类讨论思想，结合排列和组合的性质进行求解即可。

【详解】根据题意有两种方式：

第一种方式，有一个地方去 3 个专家，剩下的 2 个专家各去一个地方，

$$\text{共有 } \frac{C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^3}{A_2^2} \cdot A_3^3 = \frac{5 \times 4 \times 1}{2 \times 1} \times 3 \times 2 \times 1 = 60 \text{ 种方法，}$$

第二种方式，有一个地方去 1 个专家，另二个地方各去 2 个专家，

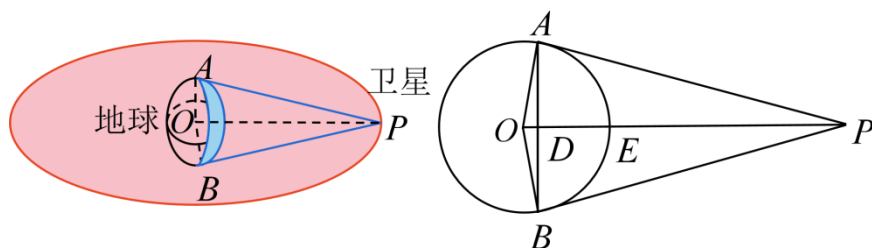
$$\text{共有 } \frac{C_5^1 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2}{A_2^2} \cdot A_3^3 = \frac{5 \times \frac{4 \times 3}{2} \times 1}{2 \times 1} \times 3 \times 2 \times 1 = 90，$$

所以分派方法的种数为 $60 + 90 = 150$ ，

故选：B

7. 北斗三号全球卫星导航系统是我国航天事业的重要成果。在卫星导航系统中，地球静止同步卫星的轨道位于地球赤道所在平面，将地球看作一个球，卫星信号像一条条直线一样发射到达球面，所覆盖的范围即为一个球冠，称此球冠的表面积为卫星信号的覆盖面积。球冠即球面被平面所截得的一部分，截得的圆叫做球冠的底，垂直于截面的直径被截得较短的一段叫做球冠的高。设球面半径为 R ，球冠的高为 h ，则球

冠的表面积为 $S = 2\pi Rh$. 已知一颗地球静止同步通信卫星距地球表面的最近距离与地球半径之比为 5, 则它的信号覆盖面积与地球表面积之比为 ()



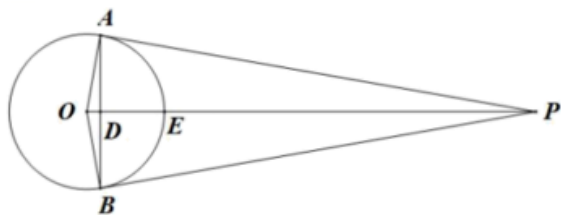
- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{5}{12}$

【答案】D

【解析】

【分析】结合图形求出 $DE = \frac{5}{6}R$, 进而利用表面积公式即可求出结果.

【详解】如下截面图,



若 O 为球心, P 为卫星位置, 故 $R = OA = OE = OB$, $h = DE$, $PE = 5R$, 所以

$$\cos \angle POA = \frac{OA}{OP} = \frac{1}{6} = \frac{OD}{OA}, \text{ 所以 } OD = \frac{1}{6}R, \text{ 即 } h = DE = \frac{5}{6}R, \text{ 所以 } \frac{2\pi Rh}{4\pi R^2} = \frac{2\pi R \frac{5}{6}R}{4\pi R^2} = \frac{5}{12}.$$

故选: D.

8. 已知实数 $a, b, c \in \mathbb{R}$, 满足 $\frac{\ln a}{e^a} = \frac{b}{e^b} = -\frac{c}{e^c}, b > 1$, 则 a, b, c 大小关系为 ()

- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $b > c > a$ D. $b > a > c$

【答案】D

【分析】

本题考查利用导数研究函数的单调性, 转化思想, 构造函数, 比较大小, 属于较难题.

由已知可得 $a > 1, c < 0$, 构造函数 $f(x) = x - \ln x, (x > 1)$, 利用函数的单调性可得 $\ln a < a$, 可得 $\frac{a}{e^a} > \frac{b}{e^b}$, 构

造函数 $h(x) = \frac{x}{e^x}$, 即可比较 a, b 大小.

【解答】

解：因为 $\frac{\ln a}{e^a} = \frac{b}{e^b} = -\frac{c}{e^c}$, $b > 1$, 所以 $\frac{b}{e^b} > 0$, $\frac{\ln a}{e^a} > 0$, $-\frac{c}{e^c} > 0$

所以 $a > 0$, $c < 0$,

又 $\frac{\ln a}{e^a} = \frac{b}{e^b}$, $b > 1$, 所以 $\ln a > 0$, 所以 $a > 1$, 即 $a > c$,

对于函数 $f(x) = x - \ln x (x > 1)$,

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} > 0,$$

可得 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x) > f(1) = 1 > 0$,

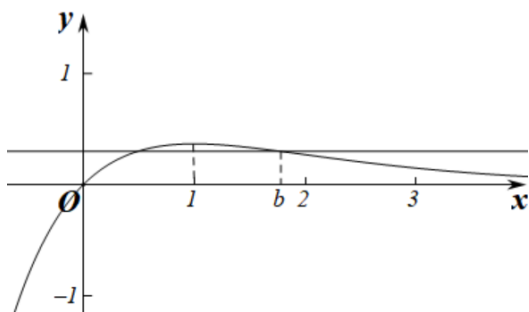
所以 $\ln a < a$, 即 $\frac{\ln a}{e^a} < \frac{a}{e^a}$,

所以 $\frac{a}{e^a} > \frac{b}{e^b}$,

令函数 $h(x) = \frac{x}{e^x}$, 则 $h'(x) = \frac{1-x}{e^x} < 0$,

当 $x < 1$ 时, $h'(x) > 0$, 则 $h(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 单调递增, 当 $x > 1$ 时, $h'(x) < 0$, 则 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

可得 $h(x)$ 的图象如下:



$\therefore 1 < a < b$,

综上所述: $b > a > c$,

故选: D.

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 定义: 在平面直角坐标系 xOy 中, 若某一个函数的图象向左或向右平移若干个单位长度后能得到另一个函数的图象, 则称这两个函数互为“原形函数”. 下列四个选项中, 函数 $y = f(x)$ 和函数 $y = g(x)$ 互为“原形函数”的是 ()

A. $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos(-x)$

B. $f(x) = \frac{4}{2^x}$, $g(x) = 2^{-x}$

C. $f(x) = \ln x$, $g(x) = \ln \frac{x}{e^5}$

D. $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $g(x) = 1 - \frac{x-3}{x-2}$

【答案】ABD

【解析】

本题考查的知识要点：函数的图象的平移变换，主要考查学生的运算能力和数学思维能力，属于基础题。
直接利用函数的图象的平移变换的应用判断A、B、C、D的结论.

【解答】

解：根据定义，对于A：把函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位，得到函数 $g(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(-x) = \cos x$ 的图象，故A正确；

对于B：将函数 $f(x) = \frac{4}{2^x} = 2^{2-x}$ 向左平移2个单位，得到 $g(x) = 2^{-x}$ 的图像，故B正确；

对于C：函数 $f(x) = \ln x$ 的图象向下平移5个单位，得到 $g(x) = \ln \frac{x}{e^5} = \ln x - 5$ 的图象，故C错误；

对于D：函数 $f(x) = \frac{1}{x-1}$ 向右平移1个单位得到 $g(x) = 1 - \frac{x-3}{x-2} = \frac{1}{x-2}$ 的图象，故D正确.

故选ABD.

10. 已知函数 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$ ($0 < \varphi < \pi$)，曲线 $y = f(x)$ 关于点 $(-\frac{\pi}{12}, 0)$ 中心对称，则()

A. $f(x)$ 的最小正周期是 π

B. $f(x)$ 在 $(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{6})$ 上单调递增

C. $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12})$ 上有2个极值点

D. 曲线 $y = f'(x)$ 关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称

【答案】AB

【解析】

【分析】

本题考查了正弦型函数的图象与性质，余弦(型)函数的对称轴，属于中档题.

根据题意求出 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ ，再根据正弦、余弦型函数的图象与性质逐项判定即可.

【解答】

解：由题意得： $f(-\frac{\pi}{12}) = \sin(-\frac{\pi}{6} + \varphi) = 0$,

所以 $-\frac{\pi}{6} + \varphi = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, 即 $\varphi = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

又 $0 < \varphi < \pi$, 所以 $k = 0$ 时, $\varphi = \frac{\pi}{6}$,

故 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$,

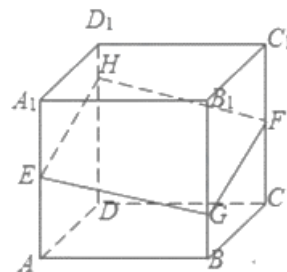
选项A, $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, $f(x)$ 的最小正周期是 π , 故A正确;

选项B, $x \in (\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{6})$ 时, $2x + \frac{\pi}{6} \in (\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{2})$, 由 $y = \sin u$ 图象知 $f(x)$ 在 $(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{6})$ 上单调递增, 故B正确;

选项 C, $x \in (-\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12})$ 时, $2x + \frac{\pi}{6} \in (0, \frac{4\pi}{3})$, 由 $y = \sin u$ 图象知 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12})$ 有 1 个极值点, 故 C 错误;

选项 D, $\because f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6}), \therefore f'(x) = 2\cos(2x + \frac{\pi}{6}), f'(\frac{\pi}{6}) = 0$, 故直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 不是 $f'(x)$ 的对称轴, 故 D 错误.

11. 如图, 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, E, F 分别是棱 AA_1, CC_1 的中点, 过点 E, F 的平面分别与棱 BB_1, DD_1 交于点 G, H , 以下四个结论正确的是. ()



A. 正方体外接球的表面积为 3π

B. 平面 $EGFH$ 与平面 $ABCD$ 所成角的最大值为 $\frac{\pi}{4}$

C. 四棱锥 $C_1 - EGFH$ 的体积为定值

D. 点 B_1 到平面 $EGFH$ 的距离的最大值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

【答案】ACD

【解析】

本题考查外接球表面积、棱锥的体积、空间中的距离及直线与平面所成角, 属于较难题.

根据正方体的特征及棱锥的体积等方法, 求解空间中的距离及直线与平面所成角, 逐项计算验证即可.

【解答】

解: 对于 A, 设正方体外接球的半径为 R , 正方体外接球的直径为 $2R = AC_1 = \sqrt{3}$, $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以正方体外接球的表面积是 $4\pi R^2 = 3\pi$, 故 A 正确;

对于 B, 由面面平行的性质定理可得 $EG \parallel FH$, $EH \parallel GF$,

可得四边形 $EGFH$ 为平行四边形,

又直角梯形 $CBGF$ 和直角梯形 $ABGE$ 全等, 可得 $EG = FG$,

即四边形 $EGFH$ 为菱形, 且 $GH \perp EF$,

由平面 $EGFH$ 在底面上的射影为四边形 $ABCD$,

由面积射影公式可得 $\cos\theta = \frac{S_{ABCD}}{S_{EGFH}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot GH} = \frac{\sqrt{2}}{GH}$,

由 $\sqrt{2} \leq GH \leq \sqrt{3}$, 可得 $\frac{\sqrt{6}}{3} \leq \cos\theta \leq 1$,

可得平面 $EGFH$ 与平面 $ABCD$ 所成角的最大值不为 $\frac{\pi}{4}$, 故 B 错误;

对于 C, 四棱锥 $C_1 - EGFH$ 的体积为 $V = 2V_{C_1 - EGF} = 2V_{E - GFC_1} = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$, 故 C 正确;

对于 D, 设 $BG = x$, $x \in [0, 1]$, $V_{B_1 - EFG} = V_{E - B_1FG} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times (1 - x) \times 1 (0 \leq x \leq 1)$,

设 B_1 到平面 $EGFH$ 的距离为 d , 可得 $V_{B_1-EGF} = \frac{1}{3}d \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{1^2 + (\frac{1}{2} - x)^2 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2}$,

$$\text{所以 } d = \frac{1-x}{\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{1}{2} + (\frac{1}{2}-x)^2}} = \frac{t}{\sqrt{2} \times \sqrt{t^2 - t + \frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{3}{4} \times \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + 1}} \quad (\text{其中 } t = 1 - x),$$

当 $x = 0$ 即 $t = 1$ 时, d 取得最大值 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 故 D 正确.

故选: ACD .

12. 已知直线 $l: y = ax - 1$, 曲线 $C_1: f(x) = e^{x+1} + 1$, 曲线 C_1 关于直线 $y = x + 1$ 对称的曲线 C_2 所对应的函数为 $y = g(x)$, 则以下说法正确的是 ()

A. 不论 a 为何值, 直线 l 恒过定点 $(0, -1)$

B. $g(x) = \ln x - 1$

C. 若直线 l 与曲线 C_2 相切, 则 $a = 1$

D. 若直线 l 上有两个关于直线 $y = x + 1$ 对称的点在曲线 C_1 上, 则 $0 < a < 1$

【答案】 ACD

【解析】

本题考查函数对称变换后的解析式求法, 以及导数的几何意义, 利用导数研究函数的最值问题, 属于较难题.

A 选项直接代入可以发现结果; B 选项假设出对称点, 再利用对称的性质可以求出 $g(x)$; C 选项假设出切点,

利用导数的几何意义可以得到方程解出切点坐标; D 选项可将问题转化为 $a = \frac{\ln x + 1}{x}$ 有两个解, 然后利用导数研究函数的最值即可得出结果.

【解答】

选项 A : 直线 $l: y = ax - 1$ 中, 令 $x = 0$, 得 $y = -1$, 与 a 无关, 故 A 正确;

选项 B : 设 $M(x, y)$ 是曲线 C_1 上任意一点, M 关于直线 $y = x + 1$ 的对称点为 $M'(x', y')$,

$$\text{则 } \begin{cases} x = y' - 1 \\ y = x' + 1 \end{cases}$$

所以 $x' + 1 = e^{y'-1+1} + 1$, 即 $x' = e^{y'}$, 所以 $y' = \ln x'$,

从而 $g(x) = \ln x$, 故 B 不正确;

选项 C : 由 $g(x) = \ln x$, 得 $g'(x) = \frac{1}{x}$,

设切点为 (x_0, y_0) ,

则切线斜率 $a = \frac{1}{x_0} = \frac{\ln x_0 + 1}{x_0}$, 所以 $x_0 = 1$,

从而 $a = 1$, 故 C 正确;

选项 D : 直线 l 上有两个关于直线 $y = x + 1$ 对称的点在曲线 C_1 上,

等价于直线 l 与曲线 C_2 有两个不同的交点.

方程 $ax - 1 = \ln x$, 即 $a = \frac{\ln x + 1}{x}$ 有两个解,

设函数 $h(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$, $x > 0$, $h'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$,

令 $h'(x) = 0$, 解得 $x = 1$,

所以函数 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 单调递减,

所以 $h(x)_{\max} = h(1) = 1$,

又当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $h(x) \rightarrow 0$,

当 $x \rightarrow 0$ 时, $h(x) \rightarrow -\infty$, 所以 $a \in (0, 1)$, 故 D 正确.

故选 ACD .

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 某圆台下底半径为 2, 上底半径为 1, 母线长为 2, 则该圆台的表面积为_____.

【答案】 11π

【解析】

【分析】 由圆台的表面积公式计算.

【详解】 由题意该圆台的表面积为 $S = \pi \times 2^2 + \pi \times 1^2 + \pi \times (2+1) \times 2 = 11\pi$.

故答案为: 11π .

14. 若 $\sin \alpha = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$, 则 $\tan 2\alpha$ 的值为_____.

【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 先求得 $\tan \alpha$, 再去求 $\tan 2\alpha$ 的值即可解决.

【详解】 由 $\sin \alpha = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$,

可得 $\sin \alpha = \cos \alpha \cos \frac{\pi}{6} - \sin \alpha \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha$

则 $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{3}$

故答案为: $\sqrt{3}$

15. 已知 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 且 $f(x) + f(2-x) = 0$, 当 $-1 < x < 0$ 时, $f(x) = 2^x$, 则 $f(2 + \log_2 \frac{5}{2})$ 的值为_____.

【答案】 $-\frac{4}{5}$ ## -0.8

【解析】

【分析】由题设条件可得 $f(x)$ 的周期为 2, 应用周期性、奇函数的性质有 $f(2 + \log_2 5) = -f(\log_2 \frac{4}{5})$, 根据已知解析式求值即可.

【详解】由题设, $f(2-x) = -f(x) = f(-x)$, 故 $f(2+x) = f(x)$, 即 $f(x)$ 的周期为 2,

所以 $f(2 + \log_2 5) = f(2 \times 2 + \log_2 \frac{5}{4}) = f(\log_2 \frac{5}{4}) = -f(\log_2 \frac{4}{5})$, 且 $-1 < \log_2 \frac{4}{5} < 0$,

所以 $f(2 + \log_2 5) = -2^{\log_2 \frac{4}{5}} = -\frac{4}{5}$.

16. 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中, 三元二次方程所对应的曲面统称为二次曲面. 比如方程 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 表示球面, 就是一种常见的二次曲面. 二次曲面在工业、农业、建筑等众多领域应用广泛. 已知点 $P(x, y, z)$ 是二次曲面 $4x^2 - xy + y^2 - z = 0$ 上的任意一点, 且 $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, 则当 $\frac{z}{xy}$ 取得最小值时,

$\frac{1}{x} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z} \right)$ 的最大值为_____.

【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】由题设有 $z = 4x^2 - xy + y^2$, 利用基本不等式求得 $\frac{z}{xy} \geq 3$ 并求对应 x, y 数量关系, 进而得到

$\frac{1}{x} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{6x^3}$, 令 $t = \frac{1}{x} > 0$ 构造 $f(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6}$, 应用导数求最大值即可.

【详解】由题设, $z = 4x^2 - xy + y^2$, 故 $\frac{z}{xy} = \frac{4x}{y} + \frac{y}{x} - 1 \geq 2\sqrt{\frac{4x}{y} \cdot \frac{y}{x}} - 1 = 3$, 当且仅当 $y = 2x$ 时等号成立,

所以, 此时 $\frac{1}{x}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{xy}-\frac{1}{xz}=\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{6x^3}$,

令 $t=\frac{1}{x}>0$, 则 $f(t)=\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6}$, 故 $f'(t)=\frac{t(2-t)}{2}$,

所以, 当 $0<t<2$ 时 $f'(t)>0$, 当 $t>2$ 时 $f'(t)<0$, 即 $f(t)$ 在 $(0,2)$ 上递增, 在 $(2,+\infty)$ 上递减.

故 $f(t)\leq f(2)=\frac{2}{3}$, 且 $x=\frac{1}{2}, y=1$ 时等号成立,

综上, $\frac{1}{x}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)$ 的最大值为 $\frac{2}{3}$.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_4=9$, $S_3=15$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 保持数列 $\{a_n\}$ 中各项先后顺序不变, 在 a_k 与 a_{k+1} ($k=1,2,\cdots$) 之间插入 2^k 个 1, 使它们和原数列的项构成一个新的数列 $\{b_n\}$, 记 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 T_{100} 的值.

【答案】(1) $a_n=2n+1$;

(2) 142.

【解析】

【分析】(1) 根据等差数列的通项公式, 结合等差数列前 n 项和公式进行求解即可;

(2) 根据题意, 结合等比数列前 n 项和公式进行求解即可.

【小问 1 详解】

设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 由已知 $a_1+3d=9$, $3a_1+3d=15$.

解得 $a_1=3$, $d=2$. 所以 $a_n=2n+1$;

【小问 2 详解】

因为 a_k 与 a_{k+1} ($k=1,2,\cdots$) 之间插入 2^k 个 1,

所以 a_k 在 $\{b_n\}$ 中对应的项数为

$$n = k + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{k-1} = k + \frac{2-2^k}{1-2} = 2^k + k - 2,$$

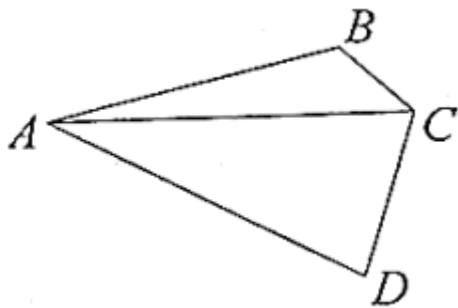
当 $k=6$ 时, $2^k + k - 2 = 68$, 当 $k=7$ 时, $2^k + k - 2 = 133$,

所以 $a_6 = b_{68}$, $a_7 = b_{133}$, 且 $b_{69} = b_{70} = \cdots = b_{100} = 1$.

因此 $T_{100} = S_6 + (2 \times 1 + 2^2 \times 1 + 2^3 \times 1 + \cdots + 2^5 \times 1) + 32 \times 1$

$$= \frac{6}{2} \times (3 + 13) + \frac{2-2^6}{1-2} + 32 = 142.$$

18. 如图, 四边形 $ABCD$ 中, $AB^2 + BC^2 + AB \cdot BC = AC^2$.



(1) 若 $AB = 3BC = 3$, 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(2) 若 $CD = \sqrt{3}BC$, $\angle CAD = 30^\circ$, $\angle BCD = 120^\circ$, 求 $\angle ACB$ 的值.

【答案】 (1) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

(2) $\angle ACB = 45^\circ$

【解析】

【分析】 (1) 依据题意求得角 B , 利用正弦定理去求 $\triangle ABC$ 的面积;

(2) 利用正弦定理解三角形即可求得 $\angle ACB$ 的值.

【小问 1 详解】

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中, } \cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{-AB \cdot BC}{2AB \cdot BC} = -\frac{1}{2},$$

因为 $0^\circ < B < 180^\circ$, 所以 $B = 120^\circ$.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \times 3 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

【小问 2 详解】

设 $\angle ACB = \theta$ ，则 $\angle ACD = 120^\circ - \theta$ ， $\angle ADC = 30^\circ + \theta$ ， $\angle BAC = 60^\circ - \theta$ 。

在 $\triangle ACD$ 中，由 $\frac{AC}{\sin(30^\circ + \theta)} = \frac{CD}{\sin 30^\circ}$ ，得 $AC = \frac{\sin(30^\circ + \theta)}{\sin 30^\circ} CD$ 。

在 $\triangle ABC$ 中，由 $\frac{AC}{\sin 120^\circ} = \frac{BC}{\sin(60^\circ - \theta)}$ ，得 $AC = \frac{\sin 120^\circ}{\sin(60^\circ - \theta)} BC$ 。

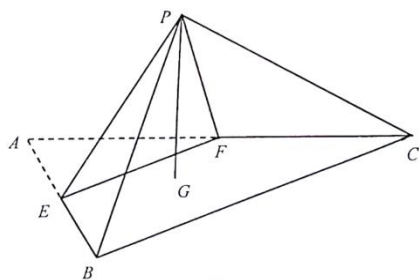
联立上式，并由 $CD = \sqrt{3}BC$ 得 $\sqrt{3} \frac{\sin(30^\circ + \theta)}{\sin 30^\circ} = \frac{\sin 120^\circ}{\sin(60^\circ - \theta)}$ ，

整理得 $\sin(30^\circ + \theta) \sin(60^\circ - \theta) = \frac{1}{4}$ ，所以 $\sin(60^\circ + 2\theta) = \frac{1}{2}$ ，

因为 $0^\circ < \theta < 60^\circ$ ，所以 $60^\circ < 60^\circ + 2\theta < 180^\circ$ ，

所以 $60^\circ + 2\theta = 150^\circ$ ，解得 $\theta = 45^\circ$ ，即 $\angle ACB$ 的值为 45° 。

19. (12 分) 如图， $\triangle ABC$ 是边长为 $4\sqrt{3}$ 的等边三角形， E, F 分别为 AB, AC 的中点， G 是 $\triangle ABC$ 的中心，以 EF 为折痕把 $\triangle AEF$ 折起，使点 A 到达点 P 的位置，且 $PG \perp$ 平面 ABC 。



(1) 证明： $PB \perp AC$ ；

(2) 求平面 PEF 与平面 PBF 所成二面角的正弦值。

【答案】(1) 证明见解析

(2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】(1) 连接 BF ，依题意可得 $BF \perp AC$ ，再由线面垂直得到 $PG \perp AC$ ，从而得到 $AC \perp$ 平面 PBF ，即可得证；

(2) 建立空间直角坐标系，利用空间向量法求出二面角的余弦值，再根据同角三角函数的基本关系计算可得；

【小问 1 详解】

证明：连接 BF ，由 $\triangle ABC$ 为等边三角形， F 为 AC 的中点，所以 $BF \perp AC$ ，

由 $PG \perp$ 平面 ABC ， $AC \subset$ 平面 ABC ，所以 $PG \perp AC$ ，

又 $PG \cap BF = G$ ， $PG, BF \subset$ 平面 PBF ，所以 $AC \perp$ 平面 PBF ，

又 $PB \subset$ 平面 PBF ，所以 $PB \perp AC$ ；

【小问 2 详解】

解：依题意 $PF = 2\sqrt{3}$ ， $GF = 2$ ，在 $\text{Rt}\triangle PFG$ 中， $PG = 2\sqrt{2}$ ，

以 F 为坐标原点，以 $\overrightarrow{FB}$ 为 x 轴的正方向，如图建立空间直角坐标系，

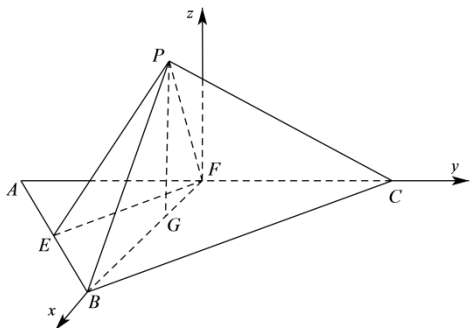
则 $A(0, -2\sqrt{3}, 0)$ ， $C(0, 2\sqrt{3}, 0)$ ， $B(6, 0, 0)$ ， $E(3, -\sqrt{3}, 0)$ ， $P(2, 0, 2\sqrt{2})$ ，

$\overrightarrow{FP} = (2, 0, 2\sqrt{2})$ ， $\overrightarrow{FE} = (3, -\sqrt{3}, 0)$ ，由 (1) 可知， $\overrightarrow{AC} = (0, 4\sqrt{3}, 0)$ 是平面 PBF 的一个法向量，

设平面 PEF 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{FP} = 2x + 2\sqrt{2}z = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{FE} = 3x - \sqrt{3}y = 0 \end{cases}$ ，令 $x = \sqrt{2}$ ，则 $\vec{n} = (\sqrt{2}, \sqrt{6}, -1)$ ，

所以 $\cos \langle \overrightarrow{AC}, \vec{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ，所以 $\sin \langle \overrightarrow{AC}, \vec{n} \rangle = \sqrt{1 - \cos^2 \langle \overrightarrow{AC}, \vec{n} \rangle} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

所以平面 PEF 与平面 PBF 所成二面角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ；



20. (12 分) 目前，全国多数省份已经开始了新高考改革。改革后，考生的高考总成绩由语文、数学、外语 3 门全国统一考试科目成绩和 3 门选择性科目成绩组成。注：甲、乙两名同学对选择性科目的选择是随机的。

(1) A 省规定：选择性考试科目学生可以从思想政治、历史、地理、物理、化学、生物 6 门科目中任选 3 门参加选择性考试。求甲同学在选择物理科目的条件下，选择化学科目的概率；

(2) B 省规定：3 门选择性科目由学生首先从物理科目和历史科目中任选 1 门，再从思想政治、地理、化学、生物 4 门科目中任选 2 门。

①求乙同学同时选择物理科目和化学科目的概率；

②为调查学生的选科情况，从某校高二年级抽取了 10 名同学，其中有 6 名首选物理，4 名首选历史。现从这 10 名同学中再选 3 名同学做进一步调查。将其中首选历史的人数记作 X ，求随机变量 X 的分布列和数学

期望.

【答案】(1) $\frac{2}{5}$

(2) ① $\frac{1}{4}$ ② 分布列见解析, 数学期望为 $\frac{6}{5}$

【解析】

【分析】(1) 首先求出“选择物理”的概率, 再求出“选择化学”的概率, 利用条件概率的计算公式求解即可;

(2) 利用相互独立事件的概率求法求①; 根据条件确定随机变量 X 的可能取值, 分别求出概率, 列分布列, 运用期望公式求出期望.

【小问 1 详解】

“选择物理”记作事件 A , “选择化学”为事件 B , 则

$$P(A) = \frac{C_5^2}{C_6^3} = \frac{1}{2}, \quad P(AB) = \frac{C_4^1}{C_6^3} = \frac{1}{5}, \quad \text{则 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{2}{5}$$

【小问 2 详解】

对于①, “选择物理”记作事件 C , “选择化学”记作事件 D , 则

$$P(C) = \frac{1}{C_2^1} = \frac{1}{2}, \quad P(D) = \frac{C_3^1}{C_4^2} = \frac{1}{2}$$

事件 C 与事件 D 相互独立, 则 $P(CD) = P(C)P(D) = \frac{1}{4}$;

对于②, 随机变量 X 可以取 0, 1, 2, 3.

$$P(X=0) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6}, \quad P(X=1) = \frac{C_4^1 C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{2},$$

$$P(X=2) = \frac{C_4^2 C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{3}{10}, \quad P(X=3) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{30},$$

随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{1}{30} = \frac{6}{5}.$$

21. (12 分) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的实轴长为 2. 点 $(\sqrt{7}, -1)$ 是抛物线 $E: x^2 = 2py$ 的准

线与 C 的一个交点.

(1) 求双曲线 C 和抛物线 E 的方程;

(2) 过双曲线 C 上一点 P 作抛物线 E 的切线, 切点分别为 A, B . 求 $\triangle PAB$ 面积的取值范围.

【答案】(1) $C: x^2 - 6y^2 = 1, E: x^2 = 4y$

(2) $\left[\frac{\sqrt{3}}{18}, +\infty\right)$

【解析】

【分析】(1) 代入点 $(\sqrt{7}, -1)$ 结合双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的实轴长为 2 可得双曲线方程, 根据抛物线的准线方程可得抛物线方程;

(2) 设直线 AB 方程为 $y = kx + m, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 根据导数的几何意义求得切线 AP, BP 的方程, 联立可得 P 的坐标, 再代入双曲线方程, 结合面积表达式求解范围即可

【小问 1 详解】

由题, $a = 1$, 又点 $(\sqrt{7}, -1)$ 在双曲线上, 故 $7 - \frac{1}{b^2} = 1$, 解得 $b^2 = \frac{1}{6}$,

故双曲线方程为 $x^2 - 6y^2 = 1$;

又点 $(\sqrt{7}, -1)$ 过抛物线 $E: x^2 = 2py$ 的准线, 故 $\frac{p}{2} = 1$, 即 $p = 2$,

故 $E: x^2 = 4y$

【小问 2 详解】

显然直线 AB 斜率存在, 故设直线 AB 方程为 $y = kx + m, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

联立 $\begin{cases} y = kx + m \\ x^2 = 4y \end{cases}$ 有 $x^2 - 4kx - 4m = 0$,

故 $x_1 + x_2 = 4k, x_1 x_2 = -4m$, 又 $E: y = \frac{1}{4}x^2, y' = \frac{1}{2}x$,

故切线 $AP: y - y_1 = \frac{1}{2}x_1(x - x_1)$, 结合 $y_1 = \frac{1}{4}x_1^2$ 整理得 $y = \frac{1}{2}x_1x - \frac{1}{4}x_1^2$,

同理切线 $BP: y = \frac{1}{2}x_2x - \frac{1}{4}x_2^2$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = \frac{1}{2}x_1x - \frac{1}{4}x_1^2 \\ y = \frac{1}{2}x_2x - \frac{1}{4}x_2^2 \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x = \frac{x_1+x_2}{2} \\ y = \frac{x_1x_2}{4} \end{cases}, \text{ 即} \begin{cases} x = 2k \\ y = -m \end{cases}, \text{ 故 } P(2k, -m).$$

$$\text{又 } S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} \sqrt{1+k^2} |x_1-x_2| \cdot \frac{|2k^2 - (-m) + m|}{\sqrt{1+k^2}} = \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} |k^2 + m|$$

$$= 4|k^2 + m|^{\frac{3}{2}}, \text{ 且 } (2k)^2 - 6(-m)^2 = 1, \text{ 即 } k^2 = \frac{6m^2+1}{4}, \text{ 故}$$

$$S_{\triangle PAB} = 4|k^2 + m|^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} |6m^2 + 4m + 1|^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \left[6 \left(m + \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{1}{3} \right]^{\frac{3}{2}},$$

$$\text{又 } P(2k, -m) \text{ 在双曲线上故 } m \in \mathbf{R}, \text{ 故 } S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} \left[6 \left(m + \frac{2}{3} \right)^2 + \frac{1}{3} \right]^{\frac{3}{2}} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{18},$$

$$\text{故 } \triangle PAB \text{ 面积的取值范围为 } \left[\frac{\sqrt{3}}{18}, +\infty \right)$$

$$22. \text{ 已知函数 } f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - x - \ln x (a \in \mathbf{R}).$$

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $x \geq 1$, $|f(x)| \geq 2$, 求 a 的取值范围;

(3) 证明: $\sum_{k=2}^n \frac{1}{\ln k} > 1 - \frac{1}{n}$.

【答案】(1) 答案见解析;

(2) $a \leq -2$ 或 $a \geq 6$;

(3) 证明见解析.

【解析】

【分析】(1) 根据导数的性质, 结合一元二次方程根的情况分类讨论进行求解即可;

(2) 根据 (1) 的结论, 结合函数的单调性和零点存在原理进行求解即可;

(3) 根据 (2) 的结论, 构造不等式 $\frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x^2 - x}$, 利用裂项相消法进行证明即可.

【小问 1 详解】

$$f(x) \text{ 定义域为 } (0, +\infty), \quad f'(x) = ax - 1 - \frac{1}{x} = \frac{ax^2 - x - 1}{x} (x > 0).$$

记 $\varphi(x) = ax^2 - x - 1$.

当 $a \leq 0$ 时, $\varphi(x) < 0$, 即 $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

当 $a > 0$ 时, 令 $\varphi(x) = 0$, 得 $x_1 = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2a}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2a}$ (舍去). 当 $x \in (0, x_1)$ 时, $\varphi(x) < 0$,

即 $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 单调递减; 当 $x \in (x_1, +\infty)$ 时, $\varphi(x) > 0$, 即 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 单调递增,

综上, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减; 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2a}\right)$ 上单调递减,

在 $\left(\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2a}, +\infty\right)$ 单调递增.

【小问 2 详解】

: 由 (1) 知, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 单调递减, 所以 $f(x) \leq f(1) = \frac{1}{2}a - 1 < 0$.

此时 $|f(x)|_{\min} = 1 - \frac{a}{2}$. 令 $1 - \frac{a}{2} \geq 2$, 解得 $a \leq -2$.

当 $a > 0$ 时, 若 $\varphi(1) = a - 2 \geq 0$, 即 $a \geq 2$, 由 (1), 设 $\varphi(x) = 0$ 的正根为 x_1 , 则必有 $x_1 \leq 1$, 且当 $x \in (1, +\infty)$,

$\varphi(x) > 0$, 即 $f'(x) > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 单调递增. 此时 $f(x) \geq f(1) = \frac{a}{2} - 1 \geq 0$, $|f(x)|_{\min} = \frac{a}{2} - 1$.

令 $\frac{a}{2} - 1 \geq 2$, 解得 $a \geq 6$.

若 $\varphi(1) = a - 2 < 0$, 即 $a < 2$, 则当 $x \in (1, x_1)$ 时, $\varphi(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 当 $x \in (x_1, +\infty)$ 时, $\varphi(x) > 0$,

$f(x)$ 单调递增, 注意到 $\varphi(x_1) = ax_1^2 - x_1 - 1 = 0$,

知 $f(x)_{\min} = f(x_1) = \frac{1}{2}ax_1^2 - x_1 - \ln x_1 = \frac{1}{2}(x_1 + 1) - x_1 - \ln x_1 = \frac{1}{2}(1 - x_1) - \ln x_1 < 0$.

又当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 由零点存在定理 $\exists x_0 \in (x_1, +\infty)$, 使 $f(x_0) = 0$, 此时 $|f(x)|_{\min} = 0$, 不满足题意.

综上, a 的取值范围是 $a \leq -2$ 或 $a \geq 6$.

【小问 3 详解】

由 (2) 知, 当 $a = 2$ 时, 对 $x > 1$, 有 $f(x) > f(1) = 0$, 即 $x^2 - x > \ln x$.

又 $x > 1$ 时, $x^2 - x > 0$, $\ln x > 0$, 所以 $\frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x^2 - x}$.

令 $x=k(k \geq 2)$, 得 $\frac{1}{\ln k} > \frac{1}{k^2-k} = \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

所以 $\frac{1}{\ln 2} > 1 - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{\ln 3} > \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, $\frac{1}{\ln 4} > \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$, ..., $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.

故 $\sum_{k=2}^n \frac{1}{\ln k} > \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}$, 即 $\sum_{k=2}^n \frac{1}{\ln k} > 1 - \frac{1}{n}$.

【点睛】 关键点睛：构造不等式 $\frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x^2-x}$, 利用裂项相消法是解题的关键.