**江苏省仪征中学2022-2023学年度第二学期高三数学学科导学案**

利用导数研究不等式

研制人： 雷成才 审核人：陈宏强

班级：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_学号：\_\_\_\_\_\_\_\_\_授课日期：

**【课标要求】**

1.以函数知识为载体,利用导数为工具研究函数的性质(单调性、极值、最值).

2.对于几个不等式同时恒成立问题、存在性问题, 会分别转化得到参数的范围问题.

3.通过数形结合思想、分类讨论思想、函数与方程思想、转化与化归思想等, 深入地培养我们分析问题和解决问题的能力.

 **【基础训练】**

1.判断正误. (正确的打“$√$”,错误的打“×”)

(1)要证明$f(x)>g(x)$,只要证明$f(x)\_{min}>g(x)\_{max}$. ( )

(2)要证明$f(x)>g(x)$,只要证明$[f(x)−g(x)]\_{min}>0$. ( )

(3)若$f(x)\_{min}>g(x)\_{max}$, 则$f(x)>g(x)$. ( )

(4)若对任意的$x\_{1},x\_{2}$,都有$f\left(x\_{1}\right)>g\left(x\_{2}\right)$,则$f(x)\_{min}>g(x)\_{max}$. ( )

(5)若存在$x\_{1},x\_{2}$, 使得$f\left(x\_{1}\right)>$ $g\left(x\_{2}\right)$, 则$f(x)\_{max }>g(x)\_{max }$. ( )

2.已知函数$f(x)=lnx−kx$,若$f(x)$在定义域内不大于0, 则实数$k$的取值范围为( )

A.$\left[\frac{1}{2e},+\infty \right)$ B.$\left[\frac{1}{e},+\infty \right)$ C.$\left[\frac{1}{2\sqrt{e}},+\infty \right)$ D.$\left[\frac{1}{\sqrt{e}},+\infty \right)$

3.若$(x−e)^{2}+a⩾\frac{ln⁡x}{x}$在$(0,+\infty )$上恒成立,则实数$a$的最小值为( )

$A.−1$ $B.\frac{1}{e}$ $C.0$ $D.e$

4.(多选题)下列不等式恒成立的是( )

A.$∀x\in \left(0,\frac{π}{2}\right),sinx>\frac{2}{π}x$ B.$lnx⩽x−1$

C.$e^{x}⩾x+1$ D.$\frac{1}{2}x>\sqrt{x−1}$

5.已知函数$f(x)=\frac{e^{x}}{x}−mx$,若$f(x)>0$在$(0,+\infty )$上恒成立,则实数$m$的取值范围是\_\_\_\_\_\_.

**【知识梳理】**

**【例题精讲】**

**考点一 利用导数证明不等式**

**例1.** 设函数$f(x)=2xlnx+1$.求证:$f(x)⩽x^{2}−x+\frac{1}{x}+2lnx$.

**变式** 已知函数$f(x)=lnx−ax(a\in R)$.

(1)试讨论$f(x)$的单调性;

(2)当$a=e$时,证明:$xf(x)−e^{x}+2ex⩽0$.

**考点二 含参不等式恒成立或存在性问题**

**例2.** (1)已知函数$f(x)=x\left|x^{2}−a\right|$, 若存在$x\in [1,2]$, 使得$f(x)<2$, 则实数$a$的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_.

(2)已知函数$f(x)=x−1−alnx$,且$f(x)⩾0$,则实数$a=$\_\_\_\_\_\_\_\_.

**变式** 已知函数$f(x)=(x+a−1)e^{x}$,$g(x)=\frac{1}{2}x^{2}+ax$,其中$a$为常数.若对任意的$x\in [0,+\infty )$,不等式$f(x)⩾g(x)$恒成立,求实数$a$的取值范围.

**考点三 含双量词的恒成立或存在性问题**

**例3.** 已知函数$f(x)=ae^{x}−x−ae$,若存在$a\in (−1,1)$,使得关于$x$的不等式$f(x)−k⩾0$恒成立,求$k$的取值范围.

**【课堂小结】**

**江苏省仪征中学2022-2023学年度第一学期高三数学学科作业**

利用导数研究不等式

研制人： 雷成才 审核人：陈宏强

班级：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_学号：\_\_\_\_\_\_\_\_\_时长：60分钟

**一、单选题**

1.已知函数$f(x)=\frac{a}{x}−1+lnx$,若存在$x\_{0}>0$,使得$f\left(x\_{0}\right)⩽0$有解,则实数$a$的取值范围是

( )

A.$a<3$ B.$a⩽1$ C.$a>2$ D.$a⩾3$

2.已知函数$f(x)=\frac{e^{x}}{x}−mx$($e$为自然对数的底数),若$f(x)>0$在$(0,+\infty )$上恒成立,则实数$m$的取值范围是( )

A.$(−\infty ,2)$ B.$(−\infty $,e$)$ C.$\left(\frac{e^{2}}{4},+\infty \right)$ D.$\left(−\infty ,\frac{e^{2}}{4}\right)$

3.若$0<x\_{1}<x\_{2}<a$都有$x\_{2}lnx\_{1}−x\_{1}lnx\_{2}<x\_{1}−x\_{2}$成立,则$a$的最大值为( )

A.$\frac{1}{2}$ B.1 C.$e$ D.$2e$

4.若$0<x\_{1}<x\_{2}<1$,则( )

A.$e^{x\_{2}}−e^{x\_{1}}>lnx\_{2}−lnx\_{1}$ B.$e^{x\_{2}}−e^{x\_{1}}<lnx\_{2}−lnx\_{1}$

C.$x\_{2}e^{x\_{1}}>x\_{1}e^{x\_{2}}$ D.$x\_{2}e^{x\_{1}}<x\_{1}e^{x\_{2}}$

5.已知函数$f(x)=\left\{\begin{matrix}2x^{2},&x⩽0,\\ln⁡(x+1),&x>0,\end{matrix}\right.$,对$∀x\in [−1$,$+\infty )$,均有$f(x)−2⩽m(x+1)$,则实数$m$的取值范围是( )

A.$\left[\frac{1}{e^{2}},+\infty \right)$ B.$\left[\frac{1}{e^{3}},+\infty \right)$ C.$\left[\frac{1}{e},+\infty \right)$ D.$\left[\frac{1}{e^{2}},\frac{1}{e}\right)$

6.若不等式$\left|lnx+\frac{1}{x}−m\right|⩽m+e$对$x\in \left[\frac{1}{e},1\right]$恒成立,则实数$m$的取值范围是( )

A.$\left[−\frac{1}{2},+\infty \right)$ B.$\left(−\infty ,−\frac{1}{2}\right]$ C.$\left[−\frac{1}{2},1\right]$ D.$[1,+\infty )$

**二、多选题**

7.已知不等式$(x−2)e^{x}⩾a$对任意的$x\in R$恒成立,则满足条件的整数$a$的可能值为( )

A.$−4$ B.$−3$ C.$−2$ D.$−1$

8.已知函数$f(x)=e^{x}−x−1$,若对于任意实数$x$,实数$m$可以使不等式$|f(x)|⩽mx^{2}e^{|x|}$成立, 则$m$的值不可能为( )

A.0 B.$\frac{1}{2}$ C.$−\frac{1}{2}$ D.4

**三、填空题**

9.设函数$f(x)=e^{x}\left(x+\frac{3}{x}−3\right)−\frac{a}{x}$,若不等式$f(x)⩽0$有正实数解,则实数$a$的最小值为\_\_\_.

10.设函数$f(x)=kx^{3}−3x+1$,若对于任意$x\in [−1,1]$,都有$f(x)⩾0$成立,则实数$k$的值为\_\_\_\_\_\_\_\_.

**四、解答题**

11.已知函数$f(x)=ax+xlnx$在$x=e^{−2}$($e$为自然对数的底数)处取得极小值.

(1)求实数$a$的值;

(2)当$x>1$时,求证:$f(x)>3(x−1)$.

12.已知函数$f(x)=x−1−alnx(a<0)$.

(1)试讨论函数$f(x)$的单调性;

(2)若对任意的$x\_{1},x\_{2}\in (0,1]$,且$x\_{1}\ne x\_{2}$,都有$\left|f\left(x\_{1}\right)−f\left(x\_{2}\right)\right|<4\left|\frac{1}{x\_{1}}−\frac{1}{x\_{2}}\right|$,求实数$a$的取值范围.