

函数的基本性质

1. A 【解析】本题考查函数的单调性和奇偶性. 根据偶函数的定义 $f(x) = f(-x)$, 可得选项 A, B, D 是偶函数, $y = -x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, $y = \cos x$ 在 $(0, +\infty)$ 上有增有减, $y = \ln|x|$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 故选 A.

2. C 【解析】本题考查函数性质的应用. 由题意知 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 由 $f(x) = x^3 - 3\sin x + 2$, 可知 $f(-x) + f(x) = (-x)^3 - 3\sin(-x) + 2 + x^3 - 3\sin x + 2 = 4$, 因此可得 $f(m) + f(-m) = 4$, 从而可知 $f(-m) = 4 - f(m) = 1$. 故选 C.

3. C 【解析】本题考查函数图像的对称性及其应用. $\because$ 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称, $g(2) = 3, \therefore f(3) = 2$. 又 $\because$ 函数 $f(x)$ 为奇函数, $\therefore f(-3) = -f(3) = -2$. 故选 C.

4. D 【解析】本题考查利用复合函数的单调性和奇偶性解不等式. 易知 $f(x)$ 为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上单调递减. $\because f(1) = 3, f(\lg x) > 3, \therefore f(|\lg x|) > f(1), \therefore |\lg x| < 1$ 且 $\lg x \neq 0$, 解得 $x \in \left(\frac{1}{10}, 1\right) \cup (1, 10)$.

5. D 【解析】本题考查函数奇偶性的判断. 设 $F(x) = f(x)f(-x)$, 满足 $F(-x) = f(-x) \cdot f(x) = F(x)$, 所以 $F(x)$ 是偶函数, 故 A 错误; 设 $M(x) = f(x)|f(-x)|, M(-x) = f(-x) \cdot |f(x)| \neq M(x)$, 同时 $M(-x) \neq -M(x)$, 所以 $M(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数, 故 B 错误; 设 $H(x) = f(x) - f(-x)$, 满足 $H(-x) = f(-x) - f(x) = -H(x)$, 所以 $H(x)$ 是奇函数, 故 C 错误; 设 $G(x) = f(x) + f(-x)$, 满足 $G(-x) = f(-x) + f(x) = G(x)$, 所以 $G(x)$ 是偶函数. 故选 D.

6. A 【解析】本题考查利用函数的奇偶性和单调性解不等式. $\because$ 函数 $f(x)$ 是定义在区间 $[-1, 1]$ 上的奇函数, $f(1-m) + f(1-m^2) < 0, \therefore f(1-m) < -f(1-m^2) = f(m^2-1)$. 又 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上是减函数, $\therefore \begin{cases} -1 \leq 1-m \leq 1, \\ -1 \leq 1-m^2 \leq 1, \end{cases}$ 解得 $0 \leq m < 1$. $\therefore$ 不等式的解集为 $[0, 1)$. 故选 A.

7. B 【解析】本题考查函数的奇偶性与周期性的应用. 方法一: 由 $f(2+x) + f(x) = 0$ 得, 函数 $f(x)$ 的周期为 4. 又当 $x \in [-2, 0]$ 时, $f(x) = -x^2 - 2x$, 且 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, $\therefore$ 当 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x) = x^2 - 2x$, $\therefore$ 当 $x \in [4, 6]$ 时, $f(x) = f(x-4) = (x-4)^2 - 2(x-4) = x^2 - 10x + 24$, 此时函数 $f(x)$ 在 $[4, 6]$ 上的最小值为 $f(5) = -1$.

8. A 【解析】本题考查函数图像对称性的应用. 函数 $f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 满足 $f(-x) = 2 - f(x)$, 即 $f(x) + f(-x) = 2$, 可得 $f(x)$ 的图像关于点 $(0, 1)$ 对称, 函数 $y = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$ 的图像也关于点 $(0, 1)$ 对称. 因为 $y = \frac{x+1}{x}$ 与 $y = f(x)$ 的图像有 10 个交点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{10}, y_{10})$, 则这 10 个交点是 5 对关于点 $(0, 1)$ 对称的点, 所以 $x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 0, y_1 + y_2 + \dots + y_{10} = 2 \times 5 = 10$. 故所有交点的横坐标和纵坐标之和为 10. 故选 A.

9. AB 【解析】本题考查函数的单调性与奇偶性、对新定义函数的理解.

由①②得“七彩函数”在定义域内既是奇函数又是减函数.

对于函数 $f(x) = \begin{cases} -2x^2, & x \geq 0 \\ 2x^2, & x < 0 \end{cases}, f(0) = 0$. 当 $x > 0$ 时, $-x < 0$, $f(x) = -2x^2, f(-x) = 2x^2$, 得 $f(x) + f(-x) = 0$; 当 $x < 0$ 时, $-x > 0, f(x) = 2x^2, f(-x) = -2x^2$, 得 $f(x) + f(-x) = 0$, 所以该函数是奇函数. 易知该函数在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 故选项 A 符合;

对于函数 $f(x) = -x^{\frac{1}{2}}$, 其定义域为 $\mathbf{R}, f(-x) = x^{\frac{1}{2}} = -f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 为奇函数, 且在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 故选项 B 符合;

对于函数 $f(x) = \frac{1}{x} - x$, 定义域为 $\{x|x \neq 0\}, f(-x) = -\frac{1}{x} + x = -f(x)$, 则函数 $f(x)$ 为奇函数. 又知 $f(-1) = -1 - (-1) = 0, f(1) = 1 - 1 = 0$, 所以函数 $f(x) = \frac{1}{x} - x$ 在定义域上不单调递减, 故选项 C 不符合;

对于函数 $f(x) = x^2 + |x|$, 定义域为 $\mathbf{R}, f(-x) = x^2 + |x| = f(x)$, 则函数 $f(x)$ 为偶函数, 故选项 D 不符合. 故选 AB.

10. ABC 【解析】本题考查对数函数的性质及复合函数单调性的判断. 由 $f(x) = \ln(x+2) + \ln(4-x)$ 可得 $\begin{cases} x+2 > 0, \\ 4-x > 0, \end{cases}$ 解得 $-2 < x < 4$. $f(x) = \ln(x+2) + \ln(4-x) = \ln(-x^2 + 2x + 8)$,

令 $u(x) = -x^2 + 2x + 8$, 则函数 $u(x)$ 的图像开口向下, 对称轴方程为 $x = 1$, 所以函数 $u(x)$ 在 $(-2, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, 4)$ 上单调递减. 又函数 $y = \ln x$ 为增函数, 则根据复合函数的单调性可得 $f(x)$ 在 $(-2, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, 4)$ 上单调递减.

因为 $f(1-x) = \ln(3-x) + \ln(3+x) = f(1+x)$, 所以函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x = 1$ 对称. 因此 A, B, C 正确, D 错误. 故选 ABC.

11. 2^{-x} (答案不唯一) 【解析】本题考查函数的性质. 函数 $f(x) = 2^{-x}$ 满足: ① $f(x)$ 单调递减; ② $f(0) = 1$.

12. $[-3, 0]$ 2 【解析】本题考查二次函数的单调性以及根据给定区间的值求参数. 因为函数 $f(x) = ax^2 + (a-3)x + 1$ 在区间 $[-1, +\infty)$ 上单调递减,

所以当 $a = 0$ 时, $f(x) = -3x + 1$, 函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 满足条件;

当 $a < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的图像开口向下, 若函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, +\infty)$ 上单调递减, 只需满足 $-\frac{a-3}{2a} \leq -1$, 解得 $-3 \leq a < 0$;

当 $a > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的图像开口向上, 在对称轴右侧函数 $f(x)$ 单调递增, 不满足条件.

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $[-3, 0]$.

当 $a = 0$ 时, 函数 $f(x) = -3x + 1$ 单调递减, 在 $[1, 2]$ 上的最小值为 $f(2) = -5 \neq 2$, 所以不成立;

当 $a < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 图像的对称轴直线 $x = -\frac{a-3}{2a} < 0$, 函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调递减, 函数 $f(x)$ 的最小值是 $f(2) = 4a + 2a - 6 + 1 = 2$, 解得 $a = \frac{7}{6}$, 舍去;

当 $a > 0$ 时, $x = -\frac{a-3}{2a} \leq 1$ 时, $a \geq 1$, 此时函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调递增, 函数 $f(x)$ 的最小值为 $f(1) = a + a - 3 + 1 = 2$, 解得 $a = 2$ 成立;

$x = -\frac{a-3}{2a} \geq 2$ 时, $0 < a \leq \frac{3}{5}$, 此时函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调递减, 函数 $f(x)$ 的最小值为 $f(2) = 4a + 2a - 6 + 1 = 2$, 解得 $a = \frac{7}{6}$ (舍去);

$1 < x = -\frac{a-3}{2a} < 2$ 时, $\frac{3}{5} < a < 1$, 此时函数 $f(x)$ 的最小值为

$f\left(-\frac{a-3}{2a}\right) = \frac{4a - (a-3)^2}{4a} = 2$, 化简得 $a^2 - 2a + 9 = 0, \Delta < 0$, 无解.

综上所述, $a = 2$.

13. 【解】 本题考查函数奇偶性的证明及不等式求解.

(1) 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是奇函数.

证明如下: 任取 $x > 0$, 则 $-x < 0$, 所以 $f(-x) = 1 - 4^x = -(4^x - 1) = -f(x)$;

再任取 $x < 0$, 则 $-x > 0$, 所以 $f(-x) = 4^{-x} - 1 = -(1 - 4^{-x}) = -f(x)$.

又当 $x = 0$ 时, $-x = 0$, 所以 $f(-x) = 0 = -f(x)$.

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是奇函数.

(2) 当 $x > 0$ 时, $f(x) = 4^x - 1$ 是增函数,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数.

又 $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -1, f(1) = 3$,

所以 $f\left(-\frac{1}{2}\right) < f(\log_4 x) \leq f(1), -\frac{1}{2} < \log_4 x \leq 1$, 所以 $\frac{1}{2} < x \leq 4$,

所以不等式 $-1 < f(\log_4 x) \leq 3$ 的解集为 $\left(\frac{1}{2}, 4\right]$.

14. 【解】 本题考查函数单调性的定义以及不等式恒成立问题的解法.

(1) 设 $x_1, x_2 \in [-1, 1]$, 且 $x_1 < x_2$,

则 $f(x_2) - f(x_1) = f(x_2) + f(-x_1) = \frac{f(x_2) + f(-x_1)}{x_2 - x_1} \times (x_2 - x_1)$.

因为 $x_1 \in [-1, 1]$, 所以 $-x_1 \in [-1, 1]$,

所以 $\frac{f(x_2) + f(-x_1)}{x_2 - x_1} > 0$, 又 $x_2 - x_1 > 0$,

所以 $f(x_2) - f(x_1) = \frac{f(x_2) + f(-x_1)}{x_2 - x_1} \times (x_2 - x_1) > 0$,

即 $f(x_2) > f(x_1)$.
所以函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上为增函数.
(2) 因为 $f(1) = 1$ 且 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上为增函数,
所以对任意 $x \in [-1, 1]$, 有 $f(x) \leq f(1) = 1$.
由题意, 对所有的 $x \in [-1, 1], b \in [-1, 1], f(x) \leq m^2 - 2bm + 1$
恒成立, 等价于 $m^2 - 2bm + 1 \geq 1 \Rightarrow m^2 - 2bm \geq 0$.
记 $g(b) = -2mb + m^2$, 对所有 $b \in [-1, 1], g(b) \geq 0$ 恒成立,
则 $\begin{cases} g(-1) = 2m + m^2 \geq 0, \\ g(1) = -2m + m^2 \geq 0, \end{cases}$
解得 $m \leq -2$ 或 $m \geq 2$ 或 $m = 0$,
所以实数 m 的取值范围为 $(-\infty, -2] \cup \{0\} \cup [2, +\infty)$.