

2022—2023 学年度第一学期期中检测试题

高三 数 学

2022. 11

(全卷满分 150 分, 考试时间 120 分钟)

一、单项选择题(本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题的四个选项中, 只有一项符合要求)

1. 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 集合 $M = \{1, 2\}$, $N = \{1, 2, 3, 4\}$, 则 $(\complement_U M) \cap N = (\quad)$

- A. $\{5\}$ B. $\{3, 4\}$ C. $\{3, 4, 5\}$ D. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

2. $\frac{1 - \tan 15^\circ}{1 + \tan 15^\circ}$ 的值为 $(\quad)$

- A. 1 B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. 古希腊数学家阿基米德的墓碑上刻着一个圆柱, 圆柱内有一个内切球, 这个球的直径恰好与圆柱的高相等, 相传这个图形表达了阿基米德最引以为自豪的发现, 即: 圆柱的内切球体积与圆柱体积比为定值, 则该定值为 $(\quad)$

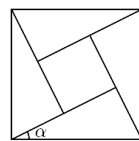
- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{3}{2}$

4. $(x-2)\left(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$ 展开式中 x 的系数为 $(\quad)$

- A. -280 B. -40 C. 40 D. 280

5. 我国古代数学家赵爽在注解《周髀算经》一书时介绍了“赵爽弦图”, 它是由四个全等的直角三角形与一个小正方形拼成的大正方形. 如图所示, 记直角三角形较小的锐角为 α , 大正方形的面积为 S_1 , 小正方形的面积为 S_2 , 若 $\frac{S_1}{S_2} = 5$, 则 $\sin \alpha + \cos \alpha$ 的值为 $(\quad)$

- A. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{7}{5}$ D. $\frac{8}{5}$



6. 已知函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 满足 $f'(x) = f(x)$ 且 $f(0) = 1$, 则不等式 $f(x) > 2e^{\frac{\pi}{3}} \cos x$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上的解集为 $(\quad)$

- A. $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ B. $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ C. $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ D. $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$

7. 甲、乙、丙、丁四人各掷骰子 5 次 (骰子出现的点数可能为 1, 2, 3, 4, 5, 6), 并分别记录自己每次出现的点数, 四人根据统计结果对自己的试验数据分别做了如下描述, 可以判断一定出现 6 点的描述是 $(\quad)$

- A. 中位数为 4, 众数为 4 B. 中位数为 3, 极差为 4
C. 平均数为 3, 方差为 2 D. 平均数为 4, 25 百分位数为 2

8. 若 $a = \frac{9e}{8}$, $b = \left(\frac{10}{9}\right)^{10}$, $c = e^{\frac{10}{9}}$, 则 a, b, c 的大小关系为 $(\quad)$

- A. $a < b < c$ B. $b < c < a$ C. $c < b < a$ D. $c < a < b$

二、多项选择题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分)

9. 设函数 $f(x), g(x)$ 的定义域都为 $\mathbb{R}$, 且 $f(x) > 0, g(x) > 0$, $f(x)$ 是减函数, $g(x)$ 是增函数,

则下列说法中正确的有 $(\quad)$

- A. $f(x) + g(x)$ 是增函数 B. $f(x) - g(x)$ 是减函数

C. $f(x)g(x)$ 是增函数

D. $\frac{f(x)}{g(x)}$ 是减函数

10. 下列说法中正确的有 ()

A. 若 $a > b > 0$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

B. 若 $a < b < 0, c < d$, 则 $ac > bd$

C. 若 $a < b, c < d$, 则 $a - d < b - c$

D. 若 $a^3 < b^3$, 则 $a^2 < b^2$

11. 已知奇函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin(\omega x + \varphi) - \cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 的最小正周期为 π , 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 则下列说法中正确的有 ()

A. 函数 $g(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{5\pi}{12}$ 对称

B. 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, 函数 $g(x)$ 的最小值是 $-\sqrt{3}$

C. 函数 $g(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$ 上单调递增

D. 若函数 $y = g(x) - k\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ 有且仅有 3 个零点, 则所有零点之和为 $\frac{\pi}{2}$

12. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域都为 $\mathbb{R}$, $f(0) = 0$, $f(1 - 2x) = f(2x - 1)$,

$f(1 - x^2) - f(1 + x^2) + 4x^2 = 0$, 则下列说法中正确的有 ()

A. 导函数 $f'(x)$ 为奇函数

B. 2 是函数 $f(x)$ 的一个周期

C. $f(2k) = 4k^2 (k \in \mathbb{Z})$

D. $f'(2023) = 4046$

三、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 已知 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}$, 则 $\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 已知直线 $y = kx$ 是曲线 $y = \log_2 x$ 的切线, 则实数 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

15. 图 1 是一枚质地均匀的骰子, 图 2 是一个正六边形 (边长为 1 个单位) 棋盘, 现通过掷骰子的方式玩跳棋游戏, 规则是: 先将一棋子放在正六边形 $ABCDEF$ 的顶点 A 处. 如果掷出的点数为 i ($i = 1, 2, \dots, 6$), 则棋子就按顺时针方向行走 i 个单位, 一直循环下去. 则某人抛掷两次骰子后棋子恰好又回到点 A 处的所有不同走法共有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 种.



图1

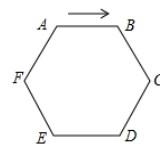


图2

16. 中国古代数学名著《九章算术》中将底面为矩形且有一条侧棱垂直于底面的四棱锥称为“阳马”，现有一“阳马”的底面是边长为 3 的正方形，垂直于底面的侧棱长为 4，则该“阳马”的内切球表面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$ ，内切球的球心和外接球的球心之间的距离为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

四、解答题 (本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)

已知命题: “ $\forall x \in [0, 1], x^2 + x - m < 0$ ” 是真命题.

(1) 求实数 m 的取值集合 A ;

(2) 设集合 $B = \left\{x \mid \frac{ax-1}{x+2} > 0\right\}$ (其中 $a > 0$), 若 $x \in A$ 是 $x \in B$ 的充分不必要条件, 求实数 a 的取值范围.

18. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = m \cdot 2^x + \frac{1}{2^x}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的奇函数.

- (1) 求实数 m 的值;
- (2) 若存在实数 $t \in [0, 2]$, 使得 $f(t^2 - k) + f(2 - kt) \geq 0$ 成立, 求实数 k 的取值范围.

19. (本小题满分 12 分)

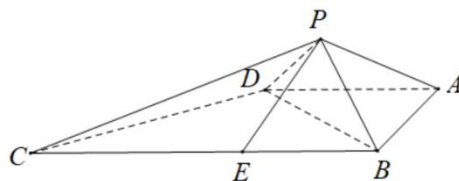
在平面四边形 $ABCD$ 中, $\angle A = 120^\circ$, $AB = AD$, $BC = 2$, $CD = 3$.

- (1) 若 $\cos \angle CBD = \frac{11}{16}$, 求 $\sin C$;
- (2) 记四边形 $ABCD$ 的面积为 S , 求 S 的最大值.

20. (本小题满分 12 分)

如图, 在体积为 1 的四棱锥 $P-ABCD$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AD \parallel BC$, $AD = AB = \sqrt{2}$, $BC = 2\sqrt{2}$, $CD \perp PB$, $PB = PD$.

- (1) 证明: 平面 PBD 平面 $\perp$ 平面 $ABCD$;
- (2) 若点 E 为棱 BC 上一动点, 求直线 PE 与平面 PAD 所成角的正弦值的最大值.



21. (本小题满分 12 分)

甲、乙两名学生进行“趣味投篮比赛”，制定比赛规则如下：每轮比赛中甲、乙两人各投一球，两人都投中或者都未投中则均记 0 分；一人投中而另一人未投中，则投中的记 1 分，未投中的记 -1 分. 设每轮比赛中甲投中的概率为 $\frac{2}{3}$ ，乙投中的概率为 $\frac{1}{2}$ ，甲、乙两人投篮相互独立，且每轮比赛互不影响.

- (1) 经过 1 轮比赛，记甲的得分为 X ，求 X 的分布列和期望；
- (2) 经过 3 轮比赛，用 $P_n(n=1,2,3)$ 表示第 n 轮比赛后甲累计得分低于乙累计得分的概率，研究发现点 $(n, P_n)(n=1,2,3)$ 均在函数 $f(x)=m(s-t^x)$ 的图象上，求实数 m, s, t 的值.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=(x-ae^{2x}+2)e^x$

- (1) 当 $a=0$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；
- (2) 当 $a>0$ 时
 - (i) 若 $f(x)\leq 1$ 恒成立，求实数 a 的最小值；
 - (ii) 若 $f(x)$ 存在最大值，求实数 a 的取值范围.