江苏省仪征中学 2023 届高三年级第一学期午间训练(46)

班级\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 日期\_\_\_\_\_\_ 评价\_\_\_\_\_\_\_\_

请大家将解题过程或思路写在题目下方

1.如图$1$，在直角梯形$P\_{1}P\_{2}P\_{3}A$中，$P\_{1}A//P\_{2}P\_{3}$，$∠AP\_{1}P\_{2}=90^{∘}$，$P\_{1}A=4$，$P\_{2}P\_{3}=6$，沿$AB$、$AC$、$BC$将$△P\_{1}AB$，$△P\_{2}BC$，$△P\_{3}AC$折起，使得$P\_{1}$、$P\_{2}$、$P\_{3}$三点重合在一起，得到图$2$所示三棱锥$P-ABC$．

$(1)$求三棱锥$P-ABC$的体积$;$

$(2)$求平面$PBC$与平面$ABC$的夹角的余弦值．

解：$(1)P\_{1}A//P\_{2}P\_{3}$，$∠AP\_{1}P\_{2}=90^{∘}$，由翻折问题的性质可得：
$PB⊥PA$，$PB⊥PC$，$PA∩PC=P$，$PA$，$PC⊂$面$PAC$

$∴PB⊥$面$PAC∵P\_{1}$，$P\_{2}$，$P\_{3}$交于一点

$∴P\_{2}C=P\_{3}C=3$，$P\_{1}B=P\_{2}B=\sqrt{3}$，$P\_{3}A=P\_{1}A=4$，根据余弦定理可得$∠APC=60^{∘}$

$$∴V\_{P-ABC}=V\_{B-PAC}=\frac{1}{3}×\frac{1}{2}×4×3sin60^{∘}×\sqrt{3}=3$$

$(2)$过点$P$在平面$PAC$内作$PC$的垂线，$∵PB⊥$面$PAC$，$∴$以$P$为原点，$PC$垂线为$x$轴，$PC$为$y$轴，

$PB$为$z$轴建立如图所示坐标系：

$A(-2\sqrt{3},2,0)$，$B(0,0,\sqrt{3})$，$C(0,3,0)$，$\vec{BA}=(-2\sqrt{3},2,-\sqrt{3})$，$\vec{BC}=(0,3,-\sqrt{3})$

设平面$BAC$法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$，$\left\{\begin{matrix}\vec{m}⋅\vec{BA}=-2\sqrt{3}x+2y-\sqrt{3}z=0\\\vec{m}⋅\vec{BC}=3y-\sqrt{3}z=0\end{matrix}\right.$

取$\vec{m}=(1,-2\sqrt{3},-6)$，取平面$PBC$的法向量$\vec{n}=(1,0,0)$

所以$cos<\vec{m}$，$\vec{n}>=\frac{1}{1×\sqrt{49}}=\frac{1}{7}$，所以二面角$P-BC-A$的余弦值为$\frac{1}{7}$．

江苏省仪征中学 2023 届高三年级第一学期午间训练(47)

班级\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 日期\_\_\_\_\_\_ 评价\_\_\_\_\_\_\_\_

请大家将解题过程或思路写在题目下方

1.如图所示，在三棱锥$A-BCD$中，侧棱$AB⊥$平面$BCD$，$F$为线段$BD$中点，$Q$为线段$AB$中点，$∠BCD=\frac{2π}{3}$，$AB=3$，$BC=CD=2.$证明：
$(1)CF⊥$平面$ABD$；
$(2)$求点$D$到平面$QCF$的距离．



|  |
| --- |
|  |

【答案】

解：$(1)$证明：$∵AB⊥$平面$BCD$，$CF$，$BD⊂$平面$BCD$，$∴AB⊥CF$，$AB⊥BD$．
$∵BC=CD=2$，$F$为$BD$中点，$∴CF⊥BD$．
又$∵CF⊥AB$，$AB∩BD=B$，$AB$，$BD⊂$平面$ABD$，$∴CF⊥$平面$ABD$．
$(2)$在三棱锥$Q-DCF$中，设$D$到平面$QFC$距离为$d$．
$∵V\_{Q-DCF}=V\_{D-QCF}$，$∴\frac{1}{3}⋅QB⋅S\_{△DCF}=\frac{1}{3}⋅d⋅S\_{△QCF}.∴d=\frac{QB⋅S\_{△DCF}}{S\_{△QCF}}$．
$∵S\_{△DCF}=\frac{1}{2}S\_{△DCB}=\frac{1}{2}×\frac{1}{2}×2×2×sin\frac{2π}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$BD=\sqrt{4+4-2×2×2×cos\frac{2π}{3}}=2\sqrt{3}$．
$∵AB⊥BD$，$AB=3$，$Q$，$F$分别为$AB$，$BD$的中点．
$∴QF=\frac{AD}{2}=\frac{\sqrt{AB^{2}+BD^{2}}}{2}=\frac{\sqrt{9+12}}{2}=\frac{\sqrt{21}}{2}$．
在$△QCF$中，$CF=2cos\frac{π}{3}=1$，$CQ=\sqrt{4+(\frac{3}{2})^{2}}=\frac{5}{2}$，$QF=\frac{\sqrt{21}}{2}$，
$∴cos∠QCF=\frac{\frac{25}{4}+1-\frac{21}{4}}{2×\frac{5}{2}×1}=\frac{2}{5}$，$∴sin∠QCF=\frac{\sqrt{21}}{5}.∴S\_{△QCF}=\frac{1}{2}×\frac{5}{2}×1×\frac{\sqrt{21}}{5}=\frac{\sqrt{21}}{4}$．
$∴d=\frac{\frac{3}{2}×\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{21}}{4}}=\frac{3\sqrt{7}}{7}$．

【解析】本题考查直线与平面垂直的判定定理的应用，等体积法的应用，点、线、面距离的求法，属于中档题．
$(1)$证明$AB⊥CF$，$AB⊥BD.$推出$CF⊥BD.$即可证明$CF⊥$平面$ABD$．
$(2)$设$D$到平面$QFC$距离为$d.$通过$V\_{Q-DCF}=V\_{D-QCF}$，转化求解即可．

江苏省仪征中学 2023 届高三年级第一学期午间训练(48)

班级\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 日期\_\_\_\_\_\_ 评价\_\_\_\_\_\_\_\_

请大家将解题过程或思路写在题目下方

1.在三棱台$ABC-A\_{1}B\_{1}C\_{1}$中，$AC=8$，$BC=6$，$AC⊥BC$，点$H$在棱$AC$上，且满足$B\_{1}H⊥AC$，$CH=3$，$B\_{1}H=3\sqrt{3}$，$∠B\_{1}BC=45°$．

$ (1)$求证：$B\_{1}C\_{1}⊥$平面$AB\_{1}C$；

$(2)$求$B\_{1}C$与平面$AA\_{1}B\_{1}$所成角的正弦值．

$(1)$证明：在$Rt△B\_{1}HC$中，$CH=3$，$B\_{1}H=3\sqrt{3}$，
$∴B\_{1}C=6$，
又因为$∠B\_{1}BC=45^{∘}$，$B\_{1}C=BC=6$，所以$BC⊥B\_{1}C$，
又因为$BC⊥AC$，$B\_{1}C$，$AC$是平面$AB\_{1}C$内的两条相交直线，
所以$BC⊥$平面$AB\_{1}C$，
因为$BC//B\_{1}C\_{1}$，
所以$B\_{1}C\_{1}⊥$平面$AB\_{1}C$；
$(2)$解：$B\_{1}H⊂$平面$AB\_{1}C$，

结合$(1)$得$BC⊥B\_{1}H$，

所以$CA,CB,HB\_{1}$两两垂直，故以$C$为原点，$\vec{CA},\vec{CB}$方向分别为$x,y$轴，过$C$且与$HB\_{1}$平行的直线为$z$轴，如图，建立空间直角坐标系，

所以$B\_{1}(3,0,3\sqrt{3}),A(8,0,0),B(0,6,0)$，可求得$\vec{CB\_{1}}=(3,0,3\sqrt{3})$，$\vec{BA}=(8,-6,0)$，$\vec{BB\_{1}}=(3,-6,3\sqrt{3})$，
于是设平面$AA\_{1}B\_{1}$的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，
$∵AB//A\_{1}B\_{1}$，$∴A$，$A\_{1}$，$B\_{1}$，$B$四点共面，
即$\left\{\begin{matrix}\vec{BA}·\vec{n}=0,\\\vec{BB\_{1}}·\vec{n}=0,\end{matrix}\right.$有$\left\{\begin{matrix}4x-3y=0\\x-2y+\sqrt{3}z=0\end{matrix}\right.$，
取$x=3\sqrt{3}$，可得$\vec{n}=(3\sqrt{3},4\sqrt{3},5)$，
所以平面$AA\_{1}B\_{1}$的法向量为$\vec{n}=(3\sqrt{3},4\sqrt{3},5)$．
设$B\_{1}C$与平面$AA\_{1}B\_{1}$所成角为$θ$，
所以$sinθ=\left|cos\left⟨\vec{n},\vec{CB\_{1}}\right⟩\right|=\frac{24\sqrt{3}}{6×10}=\frac{2\sqrt{3}}{5}$，
$∴B\_{1}C$与平面$AA\_{1}B\_{1}$所成角的正弦值为$\frac{2\sqrt{3}}{5}$．

江苏省仪征中学 2023 届高三年级第一学期午间训练(49)

班级\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 日期\_\_\_\_\_\_ 评价\_\_\_\_\_\_\_\_

请大家将解题过程或思路写在题目下方

1.如图，在四棱锥$P-ABCD$中，四边形$ABCD$是边长为$2$的正方形，$AP⊥BP$，$AP=BP$，$PD=\sqrt{6}.$记平面$PAB$与平面$PCD$的交线为$l$．
$(1)$证明：$AB//l;$

$(2)$求平面$PAB$与平面$PCD$所成的角的正弦值．

解：$(1)$因为$AB//CD$，$CD⊂$平面$PCD$，$AB⊄$平面$PCD$，
所以$AB//$平面$PCD$．
又$AB⊂$平面$PAB$，平面$PAB∩$平面$PCD=l$，所以$AB//l.$
$(2)$因为$AP⊥BP$，所以$PA^{2}+PB^{2}=AB^{2}=4$，又$PA=PB$，
所以$PA=PB=\sqrt{2}$，
又$PD=\sqrt{6}$，所以$PA^{2}+AD^{2}=PD^{2}$，所以$AD⊥PA$，
又$AD⊥AB$，$PA∩AB=A$，$PA⊂$平面$PAB$，$AB⊂$平面$PAB$，
所以$AD⊥$平面$PAB$．
取$AB$，$CD$中点分别为$O$，$M$，连接$MO$，$MP$，$OP$，

则$MO//AD$，所以$MO⊥$平面$PAB$，
又$OP⊂$平面$PAB$，所以$MO⊥OP$．
因为$PA=PB$，所以$OP⊥AB$．
又$ΔPAD≌ΔPBC$，所以$PC=PD$，所以$MP⊥CD$．
又$AB//l$，$CD//l$，所以$OP⊥l$，$MP⊥l$，
所以$∠MPO$为平面$PAB$与平面$PCD$所成的角．
在$RtΔPOM$中，$OP=\frac{1}{2}AB=1$，$MO=2$，
所以$PM=\sqrt{5}$，$sin∠MPO=\frac{MO}{PM}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，
即平面$PAB$与平面$PCD$所成的角的正弦值为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$．

江苏省仪征中学 2023 届高三年级第一学期午间训练(50)

班级\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 日期\_\_\_\_\_\_ 评价\_\_\_\_\_\_\_\_

请大家将解题过程或思路写在题目下方

1.在斜三棱柱$ABC-A\_{1}B\_{1}C\_{1}$中，$AA\_{1}⊥BC$，$AB=AC=AA\_{1}=A\_{1}C=\sqrt{2}$，$B\_{1}C=\sqrt{6}$．

$(1)$证明：$A\_{1}$在底面$ABC$上的射影是线段$BC$中点；

$(2)$求平面$A\_{1}B\_{1}C$与平面$A\_{1}B\_{1}C\_{1}$夹角的余弦值．

$(1)$证明：取线段$BC$中点$O$，连$A\_{1}O$，$AO$．
$∵AB=AC$，$O$为$BC$中点，$∴BC⊥AO$，
又已知$AA\_{1}⊥BC$，$A\_{1}A∩AO=A$，$A\_{1}$*A*、$AO$在平面$A\_{1}AO$内，
得$BC⊥$平面$A\_{1}AO$，$A\_{1}O$在平面$A\_{1}AO$内，
则$A\_{1}O⊥BC$，
由$AA\_{1}⊥BC$，$AA\_{1}//BB\_{1}$得$BB\_{1}⊥BC$，
在$Rt△B\_{1}BC$中，$B\_{1}C=\sqrt{6}$，$B\_{1}B=\sqrt{2}$，则$BC=2$，
在$△ABC$中，$AB=AC=\sqrt{2}$，$BC=2$，则$AO=1$，
在$Rt△A\_{1}OC$中，$A\_{1}C=\sqrt{2}$，$OC=1$，则$A\_{1}O=1$，
在$ΔA\_{1}AO$中，$A\_{1}A=\sqrt{2}$，$AO=A\_{1}O=1$，则$A\_{1}A^{2}=AO^{2}+A\_{1}O^{2}$，$∴A\_{1}O⊥AO$．
又$AO∩BC=O$，$BC⊂$平面$ABC$，$AO⊂$平面$ABC$，所以$A\_{1}O⊥$平面$ABC$．
所以$A\_{1}$在底面$ABC$上的射影是线段$BC$中点；

$(2)$解：以点$O$为坐标原点，$OC$，$OA$，$OA\_{1}$所在直线为$x$，$y$，$z$轴建立空间直角坐标系如图．

则$B(-1,0,0)$，$C(1,0,0)$，$A(0,1,0)$，$A\_{1}(0,0,1)$，
$\vec{CA\_{1}}=(-1,0,1)$，$\vec{A\_{1}B\_{1}}=\vec{AB}=(-1,-1,0)$．
设平面$A\_{1}B\_{1}C$的法向量$\vec{n\_{1}}=(x,y,z)$，则
$\left\{\begin{matrix}\vec{CA\_{1}}⋅\vec{n\_{1}}=0\\\vec{A\_{1}B\_{1}}⋅\vec{n\_{1}}=0\end{matrix}\right.$，即$\left\{\begin{matrix}-x+z=0\\-x-y=0\end{matrix}\right.$，可取$\left\{\begin{matrix}x=1\\y=-1\\z=1\end{matrix}\right.$，
即$\vec{n\_{1}}=(1,-1,1)$，显然平面$A\_{1}B\_{1}C\_{1}$的法向量$\vec{n\_{2}}=(0,0,1)$．
记平面$A\_{1}B\_{1}C$与平面$A\_{1}B\_{1}C\_{1}$夹角为$θ$，
则$cosθ=|cos\left⟨\vec{n\_{1}},\vec{n\_{2}}\right⟩|=\left|\frac{\vec{n\_{1}}·\vec{n\_{2}}}{\left|\vec{n\_{1}}\right|·\left|\vec{n\_{2}}\right|}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}×1}=\frac{\sqrt{3}}{3}$．

【解析】本题考查线面垂直的判定，二面角的计算，属于中档题．
$(1)$取线段$BC$中点$O$，连$A\_{1}O$，$AO$，$A\_{1}O⊥BC$，$A\_{1}O⊥AO$，所以$A\_{1}O⊥$平面$ABC$，所以$A\_{1}$在底面$ABC$上的射影是线段$BC$中点，
$(2)$以点$O$为坐标原点，$OC$，$OA$，$OA\_{1}$所在直线为$x$，$y$，$z$轴建立空间直角坐标系，平面$A\_{1}B\_{1}C$的法向量$\vec{n\_{1}}=(1,-1,1)$，平面$A\_{1}B\_{1}C\_{1}$的法向量$\vec{n\_{2}}=(0,0,1)$，利用空间向量法求解平面$A\_{1}B\_{1}C$与平面$A\_{1}B\_{1}C\_{1}$的夹角的余弦值即可．