

三角函数单元过关训练 (1)

班级_____姓名_____学号_____日期_____评价_____

一、选择题:本大题共 8 个小题,每小题 5 分,共 40 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 在直角坐标系 xOy 中,角 α 的始边为 x 轴的非负半轴,其终边上的一点 P 的坐标为 $(2m, m)$ (其中 $m < 0$), 则 $\cos 2\alpha =$ ()

- A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $-\frac{3}{5}$ D. $-\frac{4}{5}$

2. 若 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, 且 $\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{2}}{5} \sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$, 则 $\tan \alpha =$ ()

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{5}{3}$

3. 已知 $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \frac{3}{5}$, 则 $\cos 2\alpha =$ ()

- A. $-\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $-\frac{7}{25}$ D. $\frac{7}{25}$

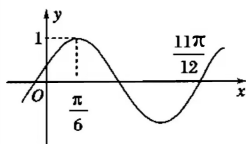
4. 若当 $x = \theta$ 时, 函数 $f(x) = 3\sin x + 4\cos x$ 取得最大值, 则 $\cos \theta =$ ()

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $-\frac{3}{5}$ D. $-\frac{4}{5}$

5. 已知函数 $f(x) = \frac{\tan x}{1 - \tan^2 x}$, 则函数 $f(x)$ 的最小正周期为 ()

- A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. π D. 2π

6. 函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 则将 $y = f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后, 得到的图象解析式为 ()



- A. $y = \sin 2x$ B. $y = \cos 2x$ C. $y = \sin(2x + \frac{2\pi}{3})$ D. $y = \sin(2x - \frac{\pi}{6})$

7. 设函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) + \cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的最小正周期为 π , 且 $f(-x) = f(x)$, 则 $f(x)$ ()

- A. 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 单调递增 B. 在 $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ 单调递减
C. 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 单调递减 D. 在 $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ 单调递增

8. 关于函数 $f(x) = \sin|x| + |\sin x|$ 有下述四个结论:

- ① $f(x)$ 是偶函数 ② $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 单调递增
③ $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 有 4 个零点 ④ $f(x)$ 的最大值为 2

其中所有正确结论的编号是

- A. ①②④ B. ②④ C. ①④ D. ①③

二、多选题:共4小题,每小题5分共20分.全部选对的得5分,部分选对的得3分,有选错的得0分.

9. 将函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$, 再把所有点的横坐标伸长到原来的2倍(纵坐标长度不变)得到函数 $g(x)$ 的图象, 则下列说法正确的是 ()

- A. 函数 $g(x)$ 的最大值为2
B. 函数 $g(x)$ 的最小正周期为 π
C. 函数 $g(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递增
D. 函数 $g(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称

10. 已知 $P\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ 是函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 图象的一个最高点, B, C 是与 P 相邻的两个最低点. 若 $|BC| = 6$, 则 $f(x)$ 的图象对称中心可以是 ()

- A. $(0, 0)$
B. $(1, 0)$
C. $(2, 0)$
D. $(5, 0)$

11. 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 π . 将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后, 所得函数图象的一条对称轴为 ()

- A. $x = 0$
B. $x = \frac{\pi}{12}$
C. $x = \frac{\pi}{8}$
D. $x = \frac{7}{12}\pi$

12. 设函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$, 其中 $\omega > 0, \varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$, 已知 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上有且仅有4个零点, 则下列 ω 的值中满足条件的是 ()

- A. $\omega = \frac{13}{6}$
B. $\omega = \frac{11}{6}$
C. $\omega = 2$
D. $\omega = \frac{3}{4}$

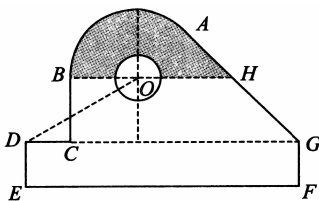
三、填空题:本大题共4小题,每题5分,共20分.把答案填写在题中横线上.

13. 已知角 θ 的顶点为坐标原点, 始边为 x 轴的非负半轴, 若 $P(-\sqrt{3}, m)$ 是角 θ 终边上的一点, 且 $\sin \theta = \frac{\sqrt{10}}{10}$, 设 $n = \tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$, 则 $m^2 + n^2 =$ _____.

14. 把函数 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象上各点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$, 纵坐标不变, 再将图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 则 $g(x)$ 在区间 $\left(\frac{4\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}\right)$ 上的值域为 _____.

15. 定义在 $[0, \pi]$ 上的函数 $y = \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$) 有零点, 且值域 $M \subseteq \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$, 则 ω 的取值范围是 _____.

16. 某中学开展劳动实习, 学生加工制作零件, 零件的截面如图所示. O 为圆孔及轮廓圆弧 AB 所在圆的圆心, A 是圆弧 AB 与直线 AG 的切点, B 是圆弧 AB 与直线 BC 的切点, 四边形 $DEFG$ 为矩形, $BC \perp DG$, 垂足为 C , $\tan \angle ODC = \frac{3}{5}$, $BH \parallel DG$, $EF = 12$ cm, $DE = 2$ cm, A 到直线 DE 和 EF 的距离均为 7 cm, 圆孔半径为 1 cm, 则图中阴影部分的面积为 _____ cm^2 .



四、解答题:本大题共2小题,共20分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分10分)

已知函数 $f(x) = 2\cos \omega x (\sin \omega x + \sqrt{3} \cos \omega x) - \sqrt{3} - 1$ ($\omega > 0$), $f(x_1) = 1$, $f(x_2) = -3$, 且 $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{2}$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调递减区间;

(2) 若 $\alpha, \beta \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$, $f\left(\frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{5}$, $\sin(\alpha + \beta) = -\frac{7}{25}$, 求 $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ 的值.

18. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$ ($|\varphi| < \frac{\pi}{2}$), 且 $\tan\varphi = -\sqrt{3}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值;

(2) 若将函数 $f(x)$ 图象上所有点的横坐标变为原来的 2 倍, 纵坐标不变, 再将得到的图象沿 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度得到函数 $g(x)$ 的图象, 求 $g(\frac{\pi}{6})$ 的值.

19. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \cos\omega x(\sqrt{3}\sin\omega x - \cos\omega x)$ ($\omega > 0$), A, B 分别是曲线 $y = f(x)$ 上的一个最高点和一个最低点, 且 $|AB|$ 的最小值为 $\sqrt{\frac{\pi^2}{4} + 4}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间和曲线 $y = f(x)$ 的对称中心的坐标;

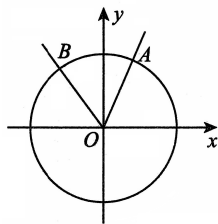
(2) 若不等式 $|f(x) - m| < 1$ 对 $x \in [-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}]$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

20. (本小题满分 12 分)

如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 都在单位圆 O 上, $\angle xOA = \alpha$, 且 $\alpha \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$.

(1) 若 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) = \frac{13}{14}$, 求 x_1 的值;

(2) 若 $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$, 求 $y = x_1^2 + y_2^2$ 的取值范围.



21. (本小题满分 12 分)

已知向量 $m = (2\cos\omega x, -1)$, $n = (\sin\omega x - \cos\omega x, 2)$ ($\omega > 0$), 函数 $f(x) = m \cdot n + 3$, 若函数 $f(x)$ 的图象的两个相邻对称中心的距离为 $\frac{\pi}{2}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调增区间;

(2) 将函数 $f(x)$ 的图象先向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位, 然后纵坐标不变, 横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 当 $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, 求函数 $g(x)$ 的值域.

22. (本小题满分 12 分)

将函数 $g(x) = 4\sin x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向左平移 φ ($0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$) 个单位长度后得到 $f(x)$ 的图象.

(1) 若 $f(x)$ 为偶函数, $\tan\alpha > 2$, 求 $f(\alpha)$ 的取值范围.

(2) 若 $f(x)$ 在 $\left(\pi, \frac{7\pi}{6}\right)$ 上是单调函数, 求 φ 的取值范围.