

导数单元综合测试卷

班级_____姓名_____日期_____评价_____

一、单项选择题(本大题共 8 小题, 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

- 若函数 $f(x) = x - g(x)$ 的图像在点 $x = 2$ 处的切线方程是 $y = -x - 1$, 则 $g(2) + g'(2) =$
 A. 7
 B. 4
 C. 0
 D. -4
- 已知函数 $f(x) = ax^3 + 3x^2 - x + 2$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数, 则实数 a 的取值范围是
 A. $(-\infty, 3)$
 B. $(-\infty, -3]$
 C. $(-3, 0)$
 D. $[-3, 0)$
- 已知曲线 $f(x) = \frac{a}{x} (x > 0, a > 0)$ 上任一点 $P(x_0, f(x_0))$, 在点 P 处的切线与 x, y 轴分别交于 A, B 两点. 若 $\triangle OAB$ 的面积为 4, 则实数 a 的值为
 A. 1
 B. 2
 C. 4
 D. 8
- 若函数 $f(x) = 2x^3 - 25x + 2 - m$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 则 $f(x)$ 的图像在点 $(m, f(m))$ 处的切线方程为
 A. $x + 2y - 70 = 0$
 B. $x - y + 32 = 0$
 C. $2x - y + 30 = 0$
 D. $x + y + 32 = 0$
- 设 $1 < x < 2$, 则 $a = \frac{e^x}{x}, b = \left(\frac{e^x}{x}\right)^2, c = \frac{e^{x^2}}{x^2}$ 的大小关系是
 A. $a < b < c$
 B. $a < c < b$
 C. $b < a < c$
 D. $c < a < b$
- 若直线 $y = m$ 分别与直线 $y = 2(x + 1)$, 曲线 $y = x + \ln x$ 交于点 A, B , 则 $|AB|$ 的最小值为
 A. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$
 B. 2
 C. 3
 D. $\frac{3}{2}$
- 若函数 $y = f(x + 1)$ 为偶函数, 且 $x \geq 1$ 时, $f(x) = x^2 - e^x$, 则不等式 $f(x) \geq f(3)$ 的解集为
 A. $[-3, +\infty)$
 B. $[-1, 3]$
 C. $(-\infty, -1]$
 D. $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
- 若曲线 $C_1: y = x^2$ 与曲线 $C_2: y = \frac{e^x}{a} (a > 0)$ 存在公切线, 则实数 a 的取值范围为
 A. $(0, 1)$
 B. $\left(1, \frac{e^2}{4}\right]$
 C. $\left[\frac{e^2}{4}, 2\right]$
 D. $\left[\frac{e^2}{4}, +\infty\right)$

二、多项选择题(本大题共 4 小题, 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求)

- 若直线 $y = \frac{1}{2}x + b$ 是函数 $f(x)$ 图像的一条切线, 则函数 $f(x)$ 可以是
 A. $f(x) = \frac{1}{x}$
 B. $f(x) = x^4$
 C. $f(x) = \sin x$
 D. $f(x) = e^x$

10. 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$, 则下列说法正确的是

- A. $f(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$
- B. 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x)$ 的图像位于 x 轴下方
- C. $f(x)$ 存在单调递增区间
- D. $f(x)$ 有且仅有一个极值点

11. 已知函数 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) = e^{-x}(x-1)$, 则下列结论正确的有

- A. 当 $x < 0$ 时, $f(x) = e^x(x+1)$
- B. 函数 $f(x)$ 有且仅有两个零点
- C. 若 $m \leq e^{-2}$, 则方程 $f(x) = m$ 在 $x > 0$ 上有解
- D. $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}, |f(x_2) - f(x_1)| < 2$ 恒成立

12. 已知函数 $f(x) = -x^3 + 2x^2 - x$, 若过点 $P(1, t)$ 可作曲线 $y = f(x)$ 的三条切线, 则实数 t 的取值可以是

- A. 0
- B. $\frac{1}{27}$
- C. $\frac{1}{28}$
- D. $\frac{1}{29}$

三、填空题(本大题共 4 小题)

13. 已知函数 $f(x) = 2f'(1) \ln x - x$, 则 $f(x)$ 的极大值为_____.

14. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 且满足关系式 $f(x) = -x^3 + 2f'(1)x + e^x$, 则 $f'(1) =$ _____.

15. 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$ ($\omega > 0$), 若 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上恰有 3 个极值点, 则 ω 的取值范围是_____.

16. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 直线 $y = ax - b$ 与函数 $f(x) = x^2$ 的图像在 $x = 1$ 处相切, 设 $g(x) = e^x - bx^2 + a$, 若在区间 $[1, 2]$ 上, 不等式 $m \leq g(x) \leq m^2 - 2$ 恒成立, 则实数 m 的最大值是_____.

四、解答题(本大题共 5 小题. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. 已知函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3bx + c$ 在 $x = 0$ 处取得极大值 1.

- (1) 求函数 $y = f(x)$ 的图像在 $x = 1$ 处的切线方程;
- (2) 若函数 $f(x)$ 在 $[t, t+2]$ 上不单调, 求实数 t 的取值范围.

18. 已知函数 $f(x) = x^3 + ax, a \in \mathbf{R}$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若函数 $g(x) = f(x) - x \ln x$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 上有零点, 求实数 a 的取值范围.

19. 已知函数 $f(x) = \ln x + ax$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $a < 0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的零点个数.

20. 设函数 $f(x) = e^x - a \ln x$ ($a \in \mathbf{R}$), 其中 e 为自然对数的底数.

(1) 若 $f(x)$ 在定义域上是增函数, 求实数 a 的取值范围;

(2) 若直线 $y = e$ 是曲线 $y = f(x)$ 的切线, 求实数 a 的值.

21. 已知函数 $f(x) = xe^x - a \ln x$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线平行于 x 轴.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 证明: 当 $b \leq e$ 时, $f(x) \geq b(x^2 - 2x + 2)$ (e 为自然对数的底数).