

江苏省江都中学、江苏省仪征中学

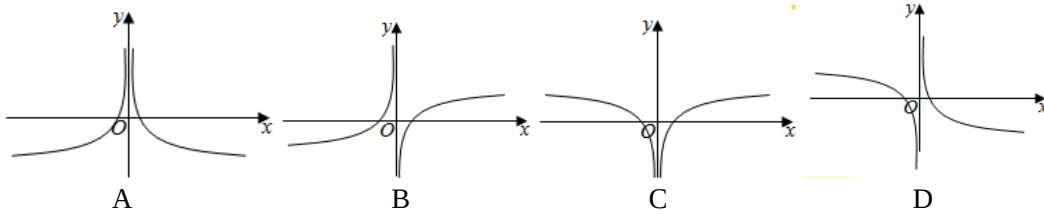
2022-2023 学年度第一学期高三 10 月联合测试数学试卷

命题单位：江苏省仪征中学 命题人：陈宏强 审核人：鲁媛媛 雷成才

注意事项：

1. 考试时间为 120 分钟，试卷满分 150 分，考试形式为闭卷；
2. 所有试题必须作答在答题卡上相应的位置，否则答题无效；
3. 答题前，请将自己的姓名、准考证号等信息填涂在答题卡的相应位置。

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x \mid (x-2)(x+1) \leq 0\}$, $B = \{x \mid y = \sqrt{1-x^2}\}$, 则 $A \cap B =$ ()
 A. $[-1, 1]$ B. $(-1, 1)$ C. $(-1, 1]$ D. $[-1, 1)$
2. 已知复数 z 满足 $z(4-3i) = 3+4i$, 则复数 z 的虚部是 ()
 A. i B. 1 C. $-i$ D. -1
3. “ $\log_2(2x-3) < 1$ ” 是 “ $4^x > 8$ ” 的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件
4. 在数学课外活动中，小明同学进行了糖块溶于水的试验，将一块质量为 7 克的糖块放入到一定量的水中，测量不同时刻未溶解糖块的质量，得到若干组数据，其中在第 5 分钟末测得的未溶解糖块的质量为 3.5 克，同时小明发现可以用指数型函数 $S = ae^{-kt}$ (a, k 为常数) 来描述以上糖块的溶解过程，其中 S (单位：克) 代表 t 分钟末未溶解糖块的质量，则 $k =$ ()
 A. $\ln 2$ B. $\ln 3$ C. $\frac{\ln 2}{5}$ D. $\frac{\ln 3}{5}$
5. 已知黄金三角形是一个等腰三角形，其底与腰的长度的比值为黄金比值 (即黄金分割值 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，该值恰好等于 $2\sin 18^\circ$)，则 $\sin 100^\circ \cos 26^\circ + \cos 100^\circ \sin 26^\circ =$ ()
 A. $-\frac{\sqrt{5}+2}{4}$ B. $\frac{\sqrt{5}+2}{4}$ C. $-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ D. $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$
6. 已知函数 $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x) + \frac{1}{x}$ ，则函数 $f(x)$ 的大致图象为 ()

7. 若 $\alpha \in (\pi, 2\pi)$, $\cos \alpha + \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}) = 0$, 则 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) =$ ()
 A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. 0 C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 0
8. 已知 $a = 5$, $b = 15(\ln 4 - \ln 3)$, $c = 16(\ln 5 - \ln 4)$, 则 ()
 A. $a < c < b$ B. $b < a < c$ C. $c < b < a$ D. $a < b < c$

二、多项选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求,全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分.

9. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 则下列叙述中正确的是()

- A. 若 $a > b$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
- B. 若 $a - |b| > 0$, 则 $a + b > 0$
- C. “ $a > 1$ ”是“ $a^2 > a$ ”的充分不必要条件
- D. 命题“ $\forall a \geq 1, a^2 - 1 \geq 0$ ”的否定是“ $\exists a < 1, a^2 - 1 < 0$ ”

10. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1, 线段 B_1D_1 上有两个动点 E, F , 且 $EF = 1$, 则下列说法中正确的是()

- A. 存在点 E, F 使得 $AE // BF$
- B. 异面直线 EF 与 C_1D 所成的角为 60°
- C. 三棱锥 $B - AEF$ 的体积为定值 $\frac{\sqrt{2}}{12}$
- D. A_1 到平面 AEF 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

11. 已知函数 $f(x) = \cos\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$ ($\omega > 0$), $f(x) \geq f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 在 $\mathbf{R}$ 恒成立, 且 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$ 单调递增, 则下列说法正确的是()

- A. 将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位所得图像关于 y 轴对称
- B. $f(x)$ 的对称中心是 $\left(\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}, 0\right)$ ($k \in \mathbf{Z}$)
- C. 若 $x_1 + x_2 = \frac{2\pi}{3}$, 则 $f(x_1) = f(x_2)$
- D. $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right]$ 上的值域为 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$

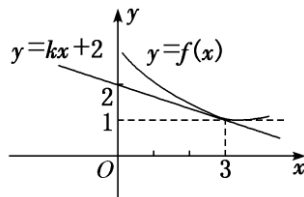
12. 已知 $a > 1, x_1, x_2, x_3$ 为函数 $f(x) = a^x - x^2$ 的零点, $x_1 < x_2 < x_3$, 则下列结论中正确的是()

- A. $x_1 > -1$
- B. $x_1 + x_2 < 0$
- C. 若 $2x_2 = x_1 + x_3$, 则 $\frac{x_3}{x_2} = \sqrt{2} + 1$
- D. a 的取值范围是 $\left(1, e^{\frac{2}{e}}\right)$

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 若“ $\exists x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, 使得 $2x^2 - \lambda x + 1 < 0$ 成立”是假命题, 则实数 λ 的取值范围是_____.

14. 已知 $y = f(x)$ 是可导函数, 如图, 直线 $y = kx + 2$ 是曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 3$ 处的切线, 令 $g(x) = xf(x)$, $g'(x)$ 是 $g(x)$ 的导函数, 则 $g'(3) =$ _____.



15. 已知正实数 a, b 满足 $ab - b + 1 = 0$, 则 $\frac{1}{a} + 4b$ 的最小值是_____.

16. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x) + f(-x) = 0$, 且 $f(x+1)$ 为偶函数, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = \sqrt{x}$. 若关于 x 的方程 $|f(x)| + f(|x|) = ax$ 有4个不同实根, 则实数 a 的取值范围是_____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知函数 $f(x) = x^2 + 4ax + 2a + 6$.

(1) 若 $f(x)$ 的值域是 $[0, +\infty)$, 求 a 的值;

(2) 若函数 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求 $g(a) = 2 - a|a - 1|$ 的值域.

解: (1) 由于函数的值域为 $[0, +\infty)$, 则判别式 $\Delta = 16a^2 - 4(2a + 6) = 0$,

解得 $a = -1$ 或 $a = \frac{3}{2}$;

(2) 由于函数 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 则 $\Delta = 16a^2 - 4(2a + 6) \leq 0$, 解得 $-1 \leq a \leq \frac{3}{2}$,

则 $-2 \leq a - 1 \leq \frac{1}{2}$, $\therefore f(a) = 2 - a|a - 1| = \begin{cases} a^2 - a + 2, & -1 \leq a \leq 1, \\ -a^2 + a + 2, & 1 < a \leq \frac{3}{2}, \end{cases}$

① 当 $-1 \leq a \leq 1$ 时, $f(a) = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(a) \leq f(-1)$, $\therefore \frac{7}{4} \leq f(a) \leq 4$;

② $1 < a \leq \frac{3}{2}$ 时, $f(a) = -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$, $f\left(\frac{3}{2}\right) \leq f(a) < f(1)$, $\therefore \frac{5}{4} \leq f(a) < 2$,

综上函数 $f(a)$ 的值域为 $\left[\frac{5}{4}, 4\right]$.

18. 已知锐角三角形 ABC 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $c + a = b(\sqrt{3}\sin C + \cos C)$.

(1) 求 B ;

(2) 若 $a = 2$, 求边 c 的取值范围.

解: (1) 由 $c + a = b(\sqrt{3}\sin C + \cos C)$ 及正弦定理得

$$\sin C + \sin A = \sqrt{3}\sin B\sin C + \sin B\cos C, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \sin C = \sqrt{3}\sin B\sin C + \sin B\cos C - \sin(B + C) = \sqrt{3}\sin B\sin C - \cos B\sin C,$$

$$\text{易知 } \sin C \neq 0, \text{ 所以 } \sqrt{3}\sin B - \cos B = 1, \sin\left(B - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } 0 < B < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } B - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}, \text{ 所以 } B = \frac{\pi}{3}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由正弦定理得 } \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C},$$

$$\text{所以 } c = \frac{2\sin C}{\sin A} = \frac{2\sin(A+B)}{\sin A} = \frac{\sin A + \sqrt{3}\cos A}{\sin A} = 1 + \frac{\sqrt{3}\cos A}{\sin A} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{\tan A} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } \triangle ABC \text{ 是锐角三角形, 所以 } \begin{cases} 0 < A < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < C = \frac{2\pi}{3} - A < \frac{\pi}{2}, \end{cases} \text{ 解得 } \frac{\pi}{6} < A < \frac{\pi}{2}. \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } y = \tan x \text{ 在 } \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ 上单调递增, 所以 } \tan A > \frac{\sqrt{3}}{3}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{从而 } 0 < \frac{\sqrt{3}}{\tan A} < 3, \text{ 所以 } 1 < c < 4, \text{ 即 } c \text{ 的取值范围是 } (1, 4). \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. 如图, 四棱锥 $S - ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形, $\angle BAD = 60^\circ$, $SA = SD = \sqrt{2}$,

$SB = 2$, 点 E 是棱 AD 的中点, 点 F 在 SC 上, 且 $SF = \frac{1}{3}SC$.

(1) 求证: $SA \parallel$ 平面 BEF ;

(2)求直线 SB 与平面 BEF 所成角的正弦值.

(1)证明:连接 AC ,设 $AC \cap BE = G$,连接 FG .

$$\because E \text{ 是 } AD \text{ 中点}, \therefore \frac{AG}{GC} = \frac{AE}{BC} = \frac{1}{2}. \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\because SF = \frac{1}{3}SC, \text{ 即 } \frac{SF}{FC} = \frac{1}{2}, \therefore \frac{SF}{FC} = \frac{AG}{GC}, \therefore FG \parallel SA. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

又 $FG \subset$ 平面 BEF , $SA \not\subset$ 平面 BEF , $\therefore SA \parallel$ 平面 BEF . $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2)解: $\because SA = SD = \sqrt{2}, \therefore SE \perp AD, SE = 1$.

又 $\because AB = AD = 2, \angle BAD = 60^\circ, \therefore BE = \sqrt{3}$.

$\therefore SE^2 + BE^2 = SB^2, \therefore SE \perp BE, \therefore AD \cap BE = E, \therefore SE \perp$ 平面 $ABCD$,

以 EA, EB, ES 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系,

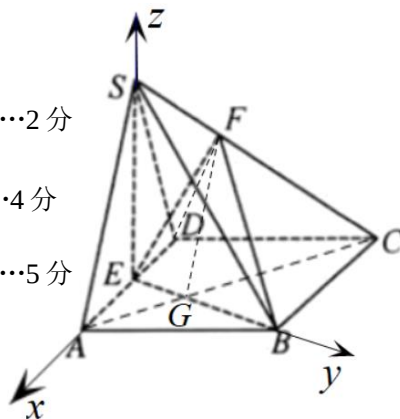
则 $A(1,0,0), B(0,\sqrt{3},0), S(0,0,1), \overrightarrow{SB} = (0,\sqrt{3},-1) \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

设平面 EFB 的法向量 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则

$$\mathbf{n} \perp \overrightarrow{EB} \Rightarrow (x, y, z) \cdot (0, \sqrt{3}, 0) = 0 \Rightarrow y = 0,$$

$$\mathbf{n} \perp \overrightarrow{GF} \Rightarrow \mathbf{n} \perp \overrightarrow{AS} \Rightarrow (x, y, z) \cdot (-1, 0, 1) = 0 \Rightarrow x = z, \text{ 令 } x = 1, \mathbf{n} = (1, 0, 1) \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{SB}, \mathbf{n} \rangle = \frac{|\overrightarrow{SB} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{SB}| |\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \text{ 即直线 } SB \text{ 与平面 } BEF \text{ 所成角的正弦值为 } \frac{\sqrt{2}}{4}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$



20. 近年, 国家逐步推行全新的高考制度. 新高考不再分文理科, 某省采用 $3+3$ 模式, 其中语文、数学、外语三科为必考科目, 满分各 150 分, 另外考生还要依据想考取的高校及专业的要求, 结合自己的兴趣爱好等因素, 在思想政治、历史、地理、物理、化学、生物 6 门科目中自选 3 门参加考试 (6 选 3), 每科目满分 100 分. 为了应对新高考, 某高中学校从高一年级 1000 名学生 (其中男生 550 人, 女生 450 人) 中, 采用分层抽样的方法从中抽取 n 名学生进行调查, 已知抽取的 n 名学生中含男生 55 人.

(1)求 n 的值;

(2) 该学校计划在高一上学期开设选修中的“物理”和“地理”两个科目, 为了了解学生对这两个科目的选课情况, 对抽取到的 n 名学生进行问卷调查 (假定每名学生在这两个科目中必须选择一个科目且只能选择一个科目), 下表是根据调查结果得到的 2×2 列联表. 请将列联表补充完整, 并判断是否有 99% 的把握认为选择科目与性别有关? 说明你的理由;

	选择“物理”	选择“地理”	总计
男生		10	
女生	25		
总计			

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, n = a + b + c + d.$$

$P(K^2 \geq k_0)$	0.05	0.01	0.005	0.001
k_0	3.841	6.635	7.879	10.828

(3) 在抽取到的女生中按 (2) 中的选课情况进行分层抽样, 从中抽出 9 名女生, 再从这 9 名女生中随机抽取 4 人, 设这 4 人中选择“地理”的人数为 X , 求 X 的分布列及期望.

解:(1)由题意得 $\frac{n}{1000} = \frac{55}{550}$, 解得 $n = 100$;

(2)填写 2×2 列联表为:

	选择“物理”	选择“地理”	总计
男生	45	10	55
女生	25	20	45
总计	70	30	100

$$K^2 = \frac{100 \times (45 \times 20 - 25 \times 10)^2}{55 \times 45 \times 70 \times 30} \approx 8.1289 > 6.635,$$

故有99%的把握认为选择科目与性别有关;

(3)从 45 名女生中分层抽样抽 9 名女生,所以这 9 名女生中有 5 人选择物理,4 人选择地理,9 名女生中再随机选择 4 名女生,则这 4 名女生中选择地理的人数 X 可为 0,1,2,3,4;

设事件 X 发生概率为 $P(X)$, 则

$$P(X=0) = \frac{C_5^4}{C_9^4} = \frac{5}{126}, P(X=1) = \frac{C_5^3 C_4^1}{C_9^4} = \frac{40}{126}, P(X=2) = \frac{C_5^2 C_4^2}{C_9^4} = \frac{60}{126},$$

$$P(X=3) = \frac{C_5^1 C_4^3}{C_9^4} = \frac{20}{126}, P(X=4) = \frac{C_4^4}{C_9^4} = \frac{1}{126}.$$

所以 X 的分布列为:

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{5}{126}$	$\frac{40}{126}$	$\frac{60}{126}$	$\frac{20}{126}$	$\frac{1}{126}$

$$\text{数学期望为 } E(X) = \frac{40}{126} + \frac{60}{126} \times 2 + \frac{20}{126} \times 3 + \frac{1}{126} \times 4 = \frac{16}{9}.$$

21. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 2, C 的右焦点 F 与点 $M(0, 2)$ 的连线与 C 的一条渐近线垂直.

(1)求 C 的标准方程;

(2)经过点 M 且斜率不为零的直线 l 与 C 的两支分别交于点 A, B .

①若 O 为坐标原点, 求 $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ 的取值范围;

②若 D 是点 B 关于 y 轴的对称点, 证明: 直线 AD 过定点.

解:(1)由题意得 $F(c, 0)$, 其中 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, 则 $\frac{c}{a} = 2$, 所以 $a^2 + b^2 = 4a^2$, 即 $b = \sqrt{3}a$, ... 2分

所以C的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \sqrt{3}x$.

因为 $k_{MF} = -\frac{2}{c} = -\frac{1}{a}$, MF 与C的一条渐近线垂直,

所以 $-\frac{1}{a} \times \sqrt{3} = -1$, 解得 $a = \sqrt{3}, b = 3$, 所以C的标准方程为 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = 1$ 4分

(2)显然直线l的斜率存在, 设其方程为 $y = kx + 2, k \neq 0$,

联立直线l与C的方程, 消去y得 $(3 - k^2)x^2 - 4kx - 13 = 0$,

因为直线l与C的两支分别交于点A, B, 所以 $\begin{cases} 3 - k^2 > 0 \\ \Delta = 156 - 36k^2 > 0 \end{cases}$, 得 $0 < k^2 < 3$,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $D(-x_2, y_2), x_1 + x_2 = \frac{4k}{3 - k^2}, x_1 x_2 = -\frac{13}{3 - k^2}$ 6分

(1) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = x_1 x_2 + (kx_1 + 2)(kx_2 + 2) = (1 + k^2)x_1 x_2 + 2k(x_1 + x_2) + 4$

$$= -\frac{13(1 + k^2)}{3 - k^2} + \frac{8k^2}{3 - k^2} + 4 = \frac{-9k^2 - 1}{3 - k^2} = 9 - \frac{28}{3 - k^2} < -\frac{1}{3},$$

所以 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ 的取值范围是 $(-\infty, -\frac{1}{3})$ 8分

(2)因为 $k_{AD} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 + x_2}$, 所以直线AD的方程为 $y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 + x_2}(x - x_1)$,

由对称性可知, 若直线AD过定点, 则定点在y轴上. 10分
在直线AD的方程中, 令 $x = 0$ 得

$$\begin{aligned} y &= y_1 - x_1 \cdot \frac{y_1 - y_2}{x_1 + x_2} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_1}{x_1 + x_2} - \frac{x_1 y_1 - x_1 y_2}{x_1 + x_2} = \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_1 + x_2} \\ &= \frac{x_1(kx_2 + 2) + x_2(kx_1 + 2)}{x_1 + x_2} = \frac{2kx_1 x_2 + 2(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} = \frac{2kx_1 x_2}{x_1 + x_2} + 2 = 2k \cdot \frac{-\frac{13}{3 - k^2}}{\frac{4k}{3 - k^2}} + 2 \\ &= -\frac{9}{2}, \text{ 所以直线AD过定点, 定点坐标为 } (0, -\frac{9}{2}). \text{ 12分} \end{aligned}$$

22. 已知函数 $f(x) = ae^{ax} + a(a > 0), g(x) = 2\left(x + \frac{1}{x}\right) \ln x$.

(1)若 $f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线与 $g(x)$ 在点 $(1, g(1))$ 处的切线互相平行, 求实数a的值;

(2)若对 $\forall x > 0, f(x) \geq g(x)$ 恒成立, 求实数a的取值范围.

解: (1) $f'(x) = a^2 e^{ax}$, 所以 $f'(0) = a^2, g'(x) = 2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \ln x + \frac{2}{x^2} + 2$,

所以 $g'(1) = 4$, 由题意知, $a^2 = 4$, 又 $a > 0$, 所以 $a = 2$.

(2)由 $f(x) \geq g(x)$ 得: $a(e^{ax} + 1) \geq 2\left(x + \frac{1}{x}\right) \ln x$, 即 $ax(e^{ax} + 1) \geq (x^2 + 1) \ln x^2$,

即 $(e^{ax} + 1) \ln e^{ax} \geq (x^2 + 1) \ln x^2$, 设 $h(x) = (x + 1) \ln x$,

则 $h(e^{ax}) = (e^{ax} + 1) \ln e^{ax}, h(x^2) = (x^2 + 1) \ln x^2$,

$h'(x) = \ln x + \frac{1}{x} + 1$, 设 $m(x) = \ln x + \frac{1}{x} + 1, m'(x) = \frac{x-1}{x^2}$,

所以当 $0 < x < 1$ 时, $m'(x) < 0, m(x)$ 单调递减, 当 $x > 1$ 时, $m'(x) > 0, m(x)$ 单调递增,

所以 $m(x)_{\min} = h'(x)_{\min} = h'(1) = 2 > 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $e^{ax} \geq x^2$ 对 $\forall x > 0$ 恒成立, 即 $a \geq \frac{2 \ln x}{x}$ 对 $\forall x > 0$ 恒成立,

设 $n(x) = \frac{2 \ln x}{x}$, 则 $n'(x) = \frac{2(1 - \ln x)}{x^2}$,

当 $0 < x < e$ 时, $n'(x) > 0, n(x)$ 单调递增, 当 $x > e$ 时, $n'(x) < 0, n(x)$ 单调递减,

所以 $n(x)_{\min} = n(e) = \frac{2}{e}$, 故 $a \geq \frac{2}{e}$, 所以实数a的取值范围为 $\left[\frac{2}{e}, +\infty\right)$.

江苏省江都中学、江苏省仪征中学

2022-2023 学年度第一学期高三 10 月联合测试数学答案

一、单项选择题：

1. A 2. B 3. A 4. C 5. D 6. D 7. B 8. C

二、多项选择题：

9. BC 10. BCD 11. ACD 12. ACD

三、填空题：

13. $(-\infty, 2\sqrt{2}]$ 14. 0 15. 9 16. $(-\frac{2}{5}, -\frac{2}{9}) \cup (\frac{2}{9}, \frac{2}{5})$

四、解答题：

17. 解：（1）由于函数的值域为 $[0, +\infty)$ ，则判别式 $\Delta = 16a^2 - 4(2a + 6) = 0$ ，
解得 $a = -1$ 或 $a = \frac{3}{2}$ ；

（2）由于函数 $f(x) \geq 0$ 恒成立，则 $\Delta = 16a^2 - 4(2a + 6) \leq 0$ ，解得 $-1 \leq a \leq \frac{3}{2}$ ，

则 $-2 \leq a - 1 \leq \frac{1}{2}$ ， $\therefore f(a) = 2 - a|a - 1| = \begin{cases} a^2 - a + 2, & -1 \leq a \leq 1, \\ -a^2 + a + 2, & 1 < a \leq \frac{3}{2}, \end{cases}$

①当 $-1 \leq a \leq 1$ 时， $f(a) = (a - \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}$ ， $f(\frac{1}{2}) \leq f(a) \leq f(-1)$ ， $\therefore \frac{7}{4} \leq f(a) \leq 4$ ；

② $1 < a \leq \frac{3}{2}$ 时， $f(a) = -(a - \frac{1}{2})^2 + \frac{9}{4}$ ， $f(\frac{3}{2}) \leq f(a) < f(1)$ ， $\therefore \frac{5}{4} \leq f(a) < 2$ ，

综上函数 $f(a)$ 的值域为 $[\frac{5}{4}, 4]$ 。

18. 解：（1）由 $c + a = b(\sqrt{3}\sin C + \cos C)$ 及正弦定理得

$\sin C + \sin A = \sqrt{3}\sin B\sin C + \sin B\cos C$ ， 1 分

所以 $\sin C = \sqrt{3}\sin B\sin C + \sin B\cos C - \sin(B + C) = \sqrt{3}\sin B\sin C - \cos B\sin C$ ，

易知 $\sin C \neq 0$ ，所以 $\sqrt{3}\sin B - \cos B = 1$ ， $\sin(B - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ 。 4 分

因为 $0 < B < \frac{\pi}{2}$ ，所以 $B - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ ，所以 $B = \frac{\pi}{3}$ 。 6 分

（2）由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ ，

所以 $c = \frac{2\sin C}{\sin A} = \frac{2\sin(A+B)}{\sin A} = \frac{\sin A + \sqrt{3}\cos A}{\sin A} = 1 + \frac{\sqrt{3}\cos A}{\sin A} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{\tan A}$ 8 分

因为 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，所以 $\begin{cases} 0 < A < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < C = \frac{2\pi}{3} - A < \frac{\pi}{2}, \end{cases}$ 解得 $\frac{\pi}{6} < A < \frac{\pi}{2}$ 。 9 分

因为 $y = \tan x$ 在 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增，所以 $\tan A > \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。 10 分

从而 $0 < \frac{\sqrt{3}}{\tan A} < 3$ ，所以 $1 < c < 4$ ，即 c 的取值范围是 $(1, 4)$ 。 12 分

19. (1)证明:连接 AC ,设 $AC \cap BE = G$,连接 FG .

$\because E$ 是 AD 中点, $\therefore \frac{AG}{GC} = \frac{AE}{BC} = \frac{1}{2}$2分

$\because SF = \frac{1}{3}SC$,即 $\frac{SF}{FC} = \frac{1}{2}$, $\therefore \frac{SF}{FC} = \frac{AG}{GC}$, $\therefore FG \parallel SA$4分

又 $FG \subset$ 平面 BEF , $SA \not\subset$ 平面 BEF ,

$\therefore SA \parallel$ 平面 BEF5分

(2)解: $\because SA = SD = \sqrt{2}$, $\therefore SE \perp AD$, $SE = 1$.

又 $\because AB = AD = 2$, $\angle BAD = 60^\circ$, $\therefore BE = \sqrt{3}$.

$\therefore SE^2 + BE^2 = SB^2$, $\therefore SE \perp BE$, $\because AD \cap BE = E$, $\therefore SE \perp$ 平面 $ABCD$,

以 EA, EB, ES 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系,

则 $A(1,0,0)$, $B(0,\sqrt{3},0)$, $S(0,0,1)$, $\overrightarrow{SB} = (0,\sqrt{3},-1)$ 9分

设平面 EFB 的法向量 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,则

$$\mathbf{n} \perp \overrightarrow{EB} \Rightarrow (x, y, z) \cdot (0, \sqrt{3}, 0) = 0 \Rightarrow y = 0,$$

$$\mathbf{n} \perp \overrightarrow{GF} \Rightarrow \mathbf{n} \perp \overrightarrow{AS} \Rightarrow (x, y, z) \cdot (-1, 0, 1) = 0 \Rightarrow x = z, \text{令 } x = 1, \mathbf{n} = (1, 0, 1) \dots\dots\dots 10\text{分}$$

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{SB}, \mathbf{n} \rangle = \frac{|\overrightarrow{SB} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{SB}| |\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \text{即直线 } SB \text{ 与平面 } BEF \text{ 所成角的正弦值为 } \frac{\sqrt{2}}{4}. \dots\dots\dots 12\text{分}$$

20. 解:(1)由题意得 $\frac{n}{1000} = \frac{55}{550}$,解得 $n = 100$;

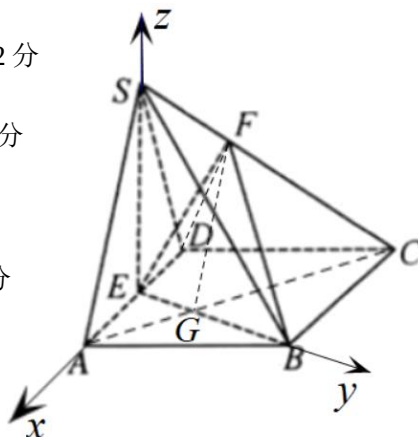
(2)填写 2×2 列联表为:

	选择“物理”	选择“地理”	总计
男生	45	10	55
女生	25	20	45
总计	70	30	100

$$K^2 = \frac{100 \times (45 \times 20 - 25 \times 10)^2}{55 \times 45 \times 70 \times 30} \approx 8.1289 > 6.635,$$

故有99%的把握认为选择科目与性别有关;

(3)从 45 名女生中分层抽样抽 9 名女生,所以这 9 名女生中有 5 人选择物理,4 人选择地理,9 名女生中再随机选择 4 名女生,则这 4 名女生中选择地理的人数 X 可为0,1,2,3,4;



设事件 X 发生概率为 $P(X)$,则

$$P(X=0) = \frac{C_5^4}{C_9^4} = \frac{5}{126}, P(X=1) = \frac{C_5^3 C_4^1}{C_9^4} = \frac{40}{126}, P(X=2) = \frac{C_5^2 C_4^2}{C_9^4} = \frac{60}{126},$$

$$P(X=3) = \frac{C_5^1 C_4^3}{C_9^4} = \frac{20}{126}, P(X=4) = \frac{C_4^4}{C_9^4} = \frac{1}{126}.$$

所以 X 的分布列为:

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{5}{126}$	$\frac{40}{126}$	$\frac{60}{126}$	$\frac{20}{126}$	$\frac{1}{126}$

$$\text{数学期望为 } E(X) = \frac{40}{126} + \frac{60}{126} \times 2 + \frac{20}{126} \times 3 + \frac{1}{126} \times 4 = \frac{16}{9}.$$

21. 解:(1)由题意得 $F(c, 0)$,其中 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$,则 $\frac{c}{a} = 2$,所以 $a^2 + b^2 = 4a^2$,即 $b = \sqrt{3}a, \dots \dots$ 2分
所以 C 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \sqrt{3}x$.

因为 $k_{MF} = -\frac{2}{c} = -\frac{1}{a}$, MF 与 C 的一条渐近线垂直,

所以 $-\frac{1}{a} \times \sqrt{3} = -1$, 解得 $a = \sqrt{3}, b = 3$, 所以 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = 1. \dots \dots \dots$ 4分

(2)显然直线 l 的斜率存在, 设其方程为 $y = kx + 2, k \neq 0$,

联立直线 l 与 C 的方程, 消去 y 得 $(3 - k^2)x^2 - 4kx - 13 = 0$,

因为直线 l 与 C 的两支分别交于点 A, B , 所以 $\begin{cases} 3 - k^2 > 0 \\ \Delta = 156 - 36k^2 > 0 \end{cases}$, 得 $0 < k^2 < 3$,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $D(-x_2, y_2), x_1 + x_2 = \frac{4k}{3 - k^2}, x_1 x_2 = -\frac{13}{3 - k^2} \dots \dots \dots$ 6分

$$\begin{aligned} (1) \vec{OA} \cdot \vec{OB} &= x_1 x_2 + y_1 y_2 = x_1 x_2 + (kx_1 + 2)(kx_2 + 2) = (1 + k^2)x_1 x_2 + 2k(x_1 + x_2) + 4 \\ &= -\frac{13(1 + k^2)}{3 - k^2} + \frac{8k^2}{3 - k^2} + 4 = \frac{-9k^2 - 1}{3 - k^2} = 9 - \frac{28}{3 - k^2} < -\frac{1}{3}, \end{aligned}$$

所以 $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ 的取值范围是 $(-\infty, -\frac{1}{3})$. $\dots \dots \dots$ 8分

(2)因为 $k_{AD} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 + x_2}$, 所以直线 AD 的方程为 $y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 + x_2}(x - x_1)$,

由对称性可知, 若直线 AD 过定点, 则定点在 y 轴上. $\dots \dots \dots$ 10分
在直线 AD 的方程中, 令 $x = 0$ 得

$$\begin{aligned} y &= y_1 - x_1 \cdot \frac{y_1 - y_2}{x_1 + x_2} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_1}{x_1 + x_2} - \frac{x_1 y_1 - x_1 y_2}{x_1 + x_2} = \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_1 + x_2} \\ &= \frac{x_1(kx_2 + 2) + x_2(kx_1 + 2)}{x_1 + x_2} = \frac{2kx_1 x_2 + 2(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} = \frac{2kx_1 x_2}{x_1 + x_2} + 2 = 2k \cdot \frac{-\frac{13}{3 - k^2}}{\frac{4k}{3 - k^2}} + 2 \\ &= -\frac{9}{2}, \end{aligned}$$

所以直线 AD 过定点, 定点坐标为 $(0, -\frac{9}{2})$. $\dots \dots \dots$ 12分

22. 解: (1) $f'(x) = a^2 e^{ax}$, 所以 $f'(0) = a^2$, $g'(x) = 2(1 - \frac{1}{x^2}) \ln x + \frac{2}{x^2} + 2$,

所以 $g'(1) = 4$, 由题意知, $a^2 = 4$, 又 $a > 0$, 所以 $a = 2$.

(2)由 $f(x) \geq g(x)$ 得: $a(e^{ax} + 1) \geq 2\left(x + \frac{1}{x}\right)\ln x$, 即 $ax(e^{ax} + 1) \geq (x^2 + 1)\ln x^2$,

即 $(e^{ax} + 1)\ln e^{ax} \geq (x^2 + 1)\ln x^2$, 设 $h(x) = (x + 1)\ln x$,

则 $h(e^{ax}) = (e^{ax} + 1)\ln e^{ax}$, $h(x^2) = (x^2 + 1)\ln x^2$,

$h'(x) = \ln x + \frac{1}{x} + 1$, 设 $m(x) = \ln x + \frac{1}{x} + 1$. $m'(x) = \frac{x-1}{x^2}$,

所以当 $0 < x < 1$ 时, $m'(x) < 0$, $m(x)$ 单调递减, 当 $x > 1$ 时, $m'(x) > 0$, $m(x)$ 单调递增,

所以 $m(x)_{\min} = h'(x)_{\min} = h'(1) = 2 > 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $e^{ax} \geq x^2$ 对 $\forall x > 0$ 恒成立, 即 $a \geq \frac{2\ln x}{x}$ 对 $\forall x > 0$ 恒成立,

设 $n(x) = \frac{2\ln x}{x}$, 则 $n'(x) = \frac{2(1-\ln x)}{x^2}$,

当 $0 < x < e$ 时, $n'(x) > 0$, $n(x)$ 单调递增, 当 $x > e$ 时, $n'(x) < 0$, $n(x)$ 单调递减,

所以 $n(x)_{\min} = n(e) = \frac{2}{e}$, 故 $a \geq \frac{2}{e}$, 所以实数 a 的取值范围为 $\left[\frac{2}{e}, +\infty\right)$.