江苏省仪征中学 2022-2023 学年度第一学期高三数学综合训练（9）

一、选择题. 本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若集合 $A=\{x|x^2-x=0\}$，$B=\left\{x\middle|y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\right\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\varnothing$　　B. $\{0\}$　　C. $\{1\}$　　D. $\{0,1\}$

2. 若复数 z 的满足 $z(1+2\mathrm{i})=-3+4\mathrm{i}$ (i 是虚数单位)，则复数 z 的实部是（　　）

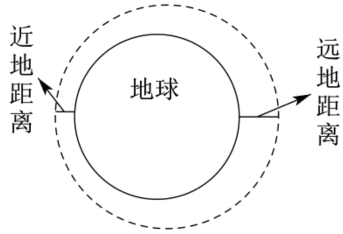
A. 1　　B. 2　　C. i　　D. $-2\mathrm{i}$

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 是无穷数列,则“$2a_2=a_1+a_3$”是“数列 $\{a_n\}$ 为等差数列”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 如图，神舟十二号的飞行轨道是以地球球心为左焦点的椭圆（图中虚线），我们把飞行轨道上的点与地球表面上的点的最近距离叫近地距离，最远距离叫远地距离.



设地球半径为 r，若神舟十二号飞行轨道的近地距离是 $\dfrac{r}{30}$，远地距离是 $\dfrac{r}{15}$，则神舟十二号的飞行轨道的离心率为（　　）

A. $\dfrac{10}{63}$　　B. $\dfrac{2}{63}$　　C. $\dfrac{1}{60}$　　D. $\dfrac{1}{63}$

5. 已知 $\left(2x^2-\dfrac{1}{x}\right)^n\left(n\in N^*\right)$ 的展开式中各项的二项式系数之和为 64，则其展开式中 x^3 的系数为（　　）

A. 160　　B. -160　　C. 60　　D. -60

6. 第十三届冬残奥会于 2022 年 3 月 4 日至 3 月 13 日在北京举行.现从 4 名男生，2 名女生中选 3 人分别担任冬季两项、单板滑雪、轮椅冰壶志愿者，且至多有 1 名女生被选中，则不同的选择方案共有（　　）.

A. 72 种　　B. 84 种　　C. 96 种　　D. 124 种

7. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 为偶函数，在 $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right)$ 单调递减，且在该区间上没有零点，则 ω 的取值范围为（　　）

A. $\left[\dfrac{3}{2},2\right]$　　B. $\left[1,\dfrac{3}{2}\right]$　　C. $\left[\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2}\right]$　　D. $\left(0,\dfrac{3}{2}\right]$

8. 已知 $a>\dfrac{1}{2}$ 且 $2a=\mathrm{e}^{a-\frac{1}{2}}$，$b>\dfrac{1}{3}$ 且 $3b=\mathrm{e}^{b-\frac{1}{3}}$，$c>\dfrac{1}{4}$ 且 $4c=\mathrm{e}^{c-\frac{1}{4}}$，则（　　）

A. $\dfrac{\ln a}{bc}<\dfrac{\ln b}{ac}<\dfrac{\ln c}{ab}$　　B. $\dfrac{\ln a}{bc}<\dfrac{\ln c}{ab}<\dfrac{\ln b}{ac}$

C. $\dfrac{\ln c}{ab}<\dfrac{\ln b}{ac}<\dfrac{\ln a}{bc}$　　D. $\dfrac{\ln b}{ac}<\dfrac{\ln a}{bc}<\dfrac{\ln c}{ab}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 下列说法正确的是（　　）

A. 将一组数据中的每一个数据都加上同一个常数后，方差不变

B. 设具有线性相关关系的两个变量 x，y 的相关系数为 r，则 $|r|$ 越接近于 0，x 和 y 之间的线性相关程度越强

C. 在一个 2×2 列联表中，由计算得 K^2 的值，则 K^2 的值越小，判断两个变量有关的把握越大

D. 若 $X\sim N\left(1,\sigma^2\right)$，$P\left(X>2\right)=0.2$，则 $P\left(0<X<1\right)=0.3$

10. 已知函数 $f\left(x\right)=2^{\sin x}$，结论正确的有（　　）

A. $f\left(x\right)$ 是周期函数　　B. $f\left(x\right)$ 的图象关于原点对称

C. $f\left(x\right)$ 的值域为 $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$　　D. $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增

11. P 是直线 $y=2$ 上的一个动点，过点 P 作圆 $x^2+y^2=1$ 的两条切线，A，B 为切点，则（　　）

A. 弦长 $|AB|$ 的最小值为 $\sqrt{3}$　　B. 存在点 P，使得 $\angle APB=90°$

C. 直线 AB 经过一个定点　　D. 线段 AB 的中点在一个定圆上

12. 在平面四边形 $ABCD$ 中，$\triangle ABD$ 的面积是 $\triangle BCD$ 面积的 2 倍，又数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足 $a_1=2$，当 $n\geq2$ 时，恒有 $\overrightarrow{BD}=\left(a_{n-1}-2^{n-1}\right)\overrightarrow{BA}+\left(a_n+2^n\right)\overrightarrow{BC}$，设 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，则（　　）

A. $\left\{a_n\right\}$ 为等比数列　　B. $\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$ 为递减数列

C. $\left\{a_n\right\}$ 为等差数列　　D. $S_n=\left(5-2n\right)2^{n+1}-10$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. . 若“$\exists x\in[-1,3]$, $x^2-2x+a<0$”为假命题, 则实数 a 的最小值为____________.

14. 已知 $0<\theta<\pi$，向量 $\vec{a}=\left(\sin\theta,2\cos^2\dfrac{\theta}{2}\right)$，$\vec{b}=\left(1,\sin\theta\right)$，且 $\vec{a}\,//\,\vec{b}$，则$\theta=$____________.

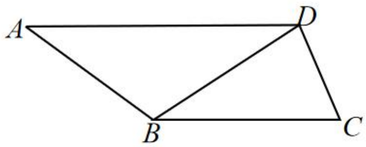
15. 已知 $a>0$，$b>0$，直线 $y=x+a$ 与曲线 $y=\mathrm{e}^{x-1}-2b+1$ 相切，则 $\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的最小值为__________.

16. 《缀术》是中国南北朝时期的一部算经，汇集了祖冲之和祖暅父子的数学研究成果.《缀术》中提出的“缘幂势既同，则积不容异”被称为祖暅原理，其意思是：如果两等高的几何体在同高处被截得的两截面面积均相等，那么这两个几何体的体积相等，该原理常应用于计算某些几何体的体积. 如图，某个西晋越窑卧足杯的上下底为互相平行的圆面，侧面为球面的一部分，上底直径为 $4\sqrt{6}\ \mathrm{cm}$，下底直径为 $6cm$，上下底面间的距离为 3cm，则该卧足杯侧面所在的球面的半径是________ cm；卧足杯的容积是________ cm^3（杯的厚度忽略不计）.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

如图，在四边形 $ABCD$ 中，$BD<AD,\sin\left(\frac{\pi}{3}-\angle A\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+\angle A\right)=\frac{1}{4}$.



（1）求 $\angle A$；

（2）若 $AB=\sqrt{3},AD=3,CD=1,\angle C=2\angle CBD$，求四边形 $ABCD$ 的面积.

18.（12 分）

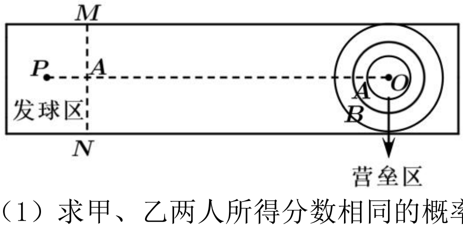
已知正项等差数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_{3n}=3a_n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，且 $2a_1,a_3+1,a_8$ 成等比数列.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $c_n=\frac{2^{a_{n+1}}}{\left(1+2^{a_n}\right)\left(1+2^{a_{n+1}}\right)}$，$R_n$ 是数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和，若对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 均有 $R_n<\lambda$ 恒成立，求 λ 的最小值.

19.（12 分）

冰壶是 2022 年 2 月 4 日至 2 月 20 日在中国举行的第 24 届冬季奥运会的比赛项目之一．冰壶比赛的场地如图所示，其中左端（投掷线 MN 的左侧）有一个发球区，运动员在发球区边沿的投掷线 MN 将冰壶掷出，使冰壶沿冰道滑行，冰道的右端有一圆形的营垒，以场上冰壶最终静止时距离营垒区圆心 O 的远近决定胜负，甲、乙两人进行投掷冰壶比赛，规定冰壶的重心落在圆 O 中，得 3 分，冰壶的重心落在圆环 A 中，得 2 分，冰壶的重心落在圆环 B 中，得 1 分，其余情况均得 0 分. 已知甲、乙投掷冰壶的结果互不影响，甲、乙得 3 分的概率分别为 $\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$；甲、乙得 2 分的概率分别为 $\frac{2}{5}$，$\frac{1}{2}$；甲、乙得 1 分的概率分别为 $\frac{1}{5}$，$\frac{1}{6}$.

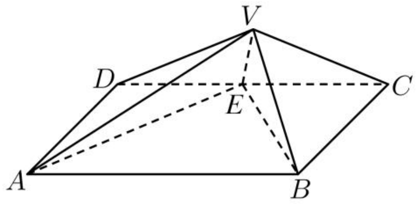


（1）求甲、乙两人所得分数相同的概率；

（2）设甲、乙两人所得的分数之和为 X，求 X 的分布列和期望.

20.（12 分）

如图，在四棱锥 $V-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$AB=2BC=4$，E 为 CD 的中点，且$\triangle VBC$ 为等边三角形.



（1）若 $VB\perp AE$，求证：$AE\perp VE$；

（2）若二面角 $A-BC-V$ 的大小为30°，求直线 AV 与平面 VCD 所成角的正弦值.

21.（12 分）

已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，过$C$的右顶点 A 的直线$l$与$C$的另一交点为$P$.当$P$为$C$的上顶点时，原点到$l$的距离为$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

（1）求C的标准方程；

（2）过 A 与l垂直的直线交抛物线$y^2=8x$于M,N两点，求$\triangle PMN$面积的最小值.

22.（12 分）已知函数$f\left(x\right)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{2}ax^2-2ax$，其中$a\in\mathrm{R}$.

（1）若函数$f\left(x\right)$在$\left[0,+\infty\right)$上单调递增，求a的取值范围；

（2）若函数$f\left(x\right)$存在两个极值点$x_1,x_2\left(x_1<x_2\right)$，当$x_1+x_2\in\left[\dfrac{5-3\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1},2\ln3-4\right]$时，求$\dfrac{x_2+2}{x_1+2}$的取值范围.

江苏省仪征中学 2022-2023 学年度第一学期高三数学综合训练（9）答案

一、选择题. 本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若集合 $A=\left\{x\middle|x^2-x=0\right\}$，$B=\left\{x\middle|y=\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\varnothing$　　B. $\{0\}$　　C. $\{1\}$　　D. $\{0,1\}$

【答案】B

【解析】

【分析】先化简集合 A，B，再利用交集运算求解.

【详解】因为 $A=\left\{x\middle|x^2-x=0\right\}=\{0,1\}$，$B=\left\{x\middle|y=\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right\}=\{x\,|\,x<1\}$，

所以 $A\cap B=\{0\}$，

故选：B

2. 若复数 z 的满足 $z(1+2\mathrm{i})=-3+4\mathrm{i}$（$\mathrm{i}$ 是虚数单位)，则复数 z 的实部是（　　）

A. 1　　B. 2　　C. i　　D. $-2\mathrm{i}$

【答案】A

【解析】

【分析】由 $z(1+2\mathrm{i})=-3+4\mathrm{i}$ 先求出复数 z，从而可求出复数 z 的实部

【详解】由 $z(1+2\mathrm{i})=-3+4\mathrm{i}$，得 $z=\frac{(-3+4\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}=\frac{-3+6\mathrm{i}+4\mathrm{i}-8\mathrm{i}^2}{5}=1+2\mathrm{i}$，

所以复数 z 的实部是 1，

故选：A

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 是无穷数列,则“$2a_2=a_1+a_3$”是“数列 $\{a_n\}$ 为等差数列”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】

【分析】

后面可以推出前面，而前面需满足对任何的$n\in\mathbf{N}^*$，都有$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$成立才可以推出后面，由充分条件和必要条件的定义可得本题答案.

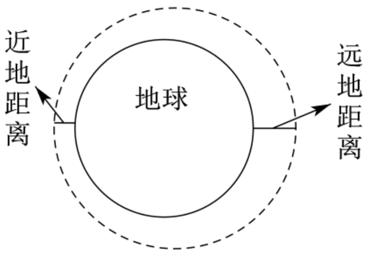
【详解】若“数列$\{a_n\}$为等差数列”成立，必有“$2a_2=a_1+a_3$”，而仅有“$2a_2=a_1+a_3$”成立，不能断定“数列$\{a_n\}$为等差数列”成立，必须满足对任何的$n\in\mathbf{N}^*$，都有$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$成立才可以，

故“$2a_2=a_1+a_3$”是“数列$\{a_n\}$为等差数列”的必要不充分条件.

故选：B

【点睛】本题主要考查充分条件和必要条件的判断，主要涉及到等差数列的定义，属于基础题.

4. 如图，神舟十二号的飞行轨道是以地球球心为左焦点的椭圆（图中虚线），我们把飞行轨道上的点与地球表面上的点的最近距离叫近地距离，最远距离叫远地距离.设地球半径为r，若神舟十二号飞行轨道的近地距离是$\frac{r}{30}$，远地距离是$\frac{r}{15}$，则神舟十二号的飞行轨道的离心率为（　　）

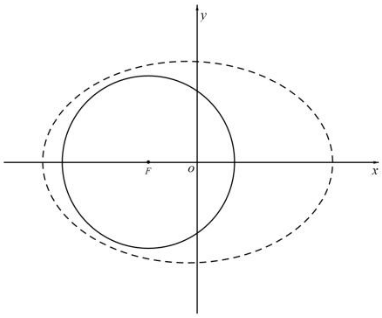


A. $\frac{10}{63}$　　B. $\frac{2}{63}$　　C. $\frac{1}{60}$　　D. $\frac{1}{63}$

【答案】D

【解析】

【分析】以运行轨道长轴所在直线为x轴，地心F为左焦点建立平面直角坐标系，设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$），根据题意列出方程组，解方程组即可.

【详解】

以运行轨道长轴所在直线为x轴，地心F为左焦点建立平面直角坐标系，

设椭圆方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$），

其中$a^2=b^2+c^2$，

根据题意有$a-c=R+\dfrac{1}{30}R=\dfrac{31}{30}R,$

$a+c=R+\dfrac{1}{15}R=\dfrac{16}{15}R$，

所以$2a=\dfrac{63}{30}R$，$2c=\dfrac{1}{30}R$，

所以椭圆的离心率$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2c}{2a}=\dfrac{1}{63}$.

故选：D.

5. 已知$\left(2x^2-\dfrac{1}{x}\right)^n\left(n\in N^*\right)$的展开式中各项的二项式系数之和为64，则其展开式中x^3的系数为（　　）

A. 160　　B. -160　　C. 60　　D. -60

【答案】B

【解析】

【分析】由二项式系数的性质求出n，写出二项展开式的通项公式，令x的指数为3，即可得出答案.

【详解】由展开式中各项的二项式系数之和为64，得$2^n=64$，得$n=6$.

$\because\left(2x^2-\dfrac{1}{x}\right)^6$的展开式的通项公式为$T_{r+1}=C_6^r\left(2x^2\right)^{6-r}(-1)^r\left(\dfrac{1}{x}\right)^r=C_6^r2^{6-r}(-1)^rx^{12-3r}$，

令$12-3r=3$，则$r=3$，所以其展开式中x^3的系数为$C_6^3 2^3\left(-1\right)^3=-160$.

故选：B.

6. 第十三届冬残奥会于2022年3月4日至3月13日在北京举行.现从4名男生，2名女生中选3人分别担任冬季两项、单板滑雪、轮椅冰壶志愿者，且至多有1名女生被选中，则不同的选择方案共有（　　）.

A. 72种　　B. 84种　　C. 96种　　D. 124种

【答案】C

【解析】

【分析】先分有一名女生和没有女生两种情况选出自愿者，然后再排列.

【详解】第一步，选出的自愿者中没有女生共$C_4^3=4$种，只有一名女生共$C_4^2C_2^1=12$种；

第二步，将三名志愿者分配到三项比赛中共有$A_3^3=6$.

所以，不同的选择方案共有$(12+4)\times 6=96$种.

故选：C

7. 已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$为偶函数，在$\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$单调递减，且在该区间上没有零点，则$\omega$的取值范围为（　　）

A. $\left[\frac{3}{2},2\right]$　　B. $\left[1,\frac{3}{2}\right]$　　C. $\left[\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right]$　　D. $\left(0,\frac{3}{2}\right]$

【答案】D

【解析】

【分析】根据题意先求出φ并将函数化简，进而根据函数在$\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$单调递减，且在该区间上没有零点，列出关于$\omega$的不等式，最后解得答案.

【详解】因为函数为偶函数，且在$\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$单调递减，所以$\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi\left(k\in Z\right)$，而$0<\varphi<\pi$，则

$\varphi=\dfrac{\pi}{2}$，于是 $f(x)=A\cos\omega x(\omega>0)$，函数在 $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right)$ 单调递减，且在该区间上没有零点，所以 $0<\dfrac{\pi}{3}\omega\le\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\omega\in(0,\dfrac{3}{2}]$.

故选：D.

8. 已知 $a>\dfrac{1}{2}$ 且 $2a=e^{a-\frac{1}{2}}$，$b>\dfrac{1}{3}$ 且 $3b=e^{b-\frac{1}{3}}$，$c>\dfrac{1}{4}$ 且 $4c=e^{c-\frac{1}{4}}$，则（　　）

A. $\dfrac{\ln a}{bc}<\dfrac{\ln b}{ac}<\dfrac{\ln c}{ab}$　　B. $\dfrac{\ln a}{bc}<\dfrac{\ln c}{ab}<\dfrac{\ln b}{ac}$

C. $\dfrac{\ln c}{ab}<\dfrac{\ln b}{ac}<\dfrac{\ln a}{bc}$　　D. $\dfrac{\ln b}{ac}<\dfrac{\ln a}{bc}<\dfrac{\ln c}{ab}$

【答案】A

【解析】

【分析】对已知的等式进行变形，转化成结构一致，从而构造函数，确定构造的函数的性质，得到 a、b、c 的大小，再根据选项构造函数，借助函数的单调性比较大小即可.

【详解】由已知条件，对于 $2a=e^{a-\frac{1}{2}}$，两边同取对数，

则有 $\ln 2+\ln a=a-\dfrac{1}{2}$，即 $a-\ln a=\dfrac{1}{2}+\ln 2=\dfrac{1}{2}-\ln\dfrac{1}{2}$，

同理：$b-\ln b=\dfrac{1}{3}-\ln\dfrac{1}{3}$；$c-\ln c=\dfrac{1}{4}-\ln\dfrac{1}{4}$

构造函数 $f\left(x\right)=x-\ln x$，

则 $f\left(a\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f\left(b\right)=f\left(\dfrac{1}{3}\right)$，$f\left(c\right)=f\left(\dfrac{1}{4}\right)$

对其求导得：$f'\left(x\right)=\dfrac{x-1}{x}\left(x>0\right)$

$\therefore$ 当 $0<x<1$ 时，$f'\left(x\right)<0$，$f\left(x\right)$ 单调递减；

当 $x>1$ 时，$f'\left(x\right)>0$，$f\left(x\right)$ 单调递增；

又 $\because a>\dfrac{1}{2}$，$b>\dfrac{1}{3}$，$c>\dfrac{1}{4}$

$\therefore 1<a<b<c$

再构造函数 $g\left(x\right)=x\ln x$，对其求导得：

$g'(x)=\ln x+1(x>0)$

$\therefore$ 当 $0<x<\frac{1}{e}$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

当 $x>\frac{1}{e}$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；

$\therefore g(a)<g(b)<g(c)$

即：$a\ln a<b\ln b<c\ln c$

又 $\because abc>0$

$\therefore \frac{\ln a}{bc}<\frac{\ln b}{ac}<\frac{\ln c}{ab}$

故选：A.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 下列说法正确的是（　　）

A. 将一组数据中的每一个数据都加上同一个常数后，方差不变

B. 设具有线性相关关系的两个变量 x，y 的相关系数为 r，则 $|r|$ 越接近于 0，x 和 y 之间的线性相关程度越强

C. 在一个 2×2 列联表中，由计算得 K^2 的值，则 K^2 的值越小，判断两个变量有关的把握越大

D. 若 $X\sim N(1,\sigma^2)$，$P(X>2)=0.2$，则 $P(0<X<1)=0.3$

【答案】AD

【解析】

【分析】对于 A，由方差的定义判断，对于 B，由相关系数的性质判断，对于 C，由 K^2 的性质判断，对于 D，由正态曲线的对称性求解

【详解】对于 A，设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的平均数为 $\overline{x}$，方差为 s^2，则

$\overline{x}=\frac{1}{n}(x+x_2+\cdots+x_n)$，$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]$，

给 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中每一个数同时加上 a，则得到一组新的数为 $x_1+a,x_2+a,\cdots,x_n+a$，则其平均数为 $\overline{x}'=\overline{x}+a$，所以新的数据的方差为

$s'^2=\frac{1}{n}[(x_1+a-\overline{x}-a)^2+(x_2+a-\overline{x}-a)^2+\cdots+(x_n+a-\overline{x}-a)^2]=s^2$，即方差不变，所以 A 正确，

对于 B，由相关系数的性质可知，设具有线性相关关系的两个变量 x，y 的相关系数为 r，则 $|r|$ 越接近于 0，x 和 y 之间的线性相关程度越弱，所以 B 错误，

对于 C，在一个 2×2 列联表中，由计算得 K^2 的值，则 K^2 的值越大，判断两个变量有关的把握越大，所以 C 错误，

对于 D，因为 $X\sim N\left(1,\sigma^2\right)$，$P\left(X>2\right)=0.2$，所以 $P\left(X<0\right)=0.2$，

所以 $P\left(0<X<1\right)=\frac{1}{2}\times(1-2\times0.2)=0.3$，所以 D 正确，

故选：AD

10. 已知函数 $f\left(x\right)=2^{\sin x}$，结论正确的有（　　）

A. $f\left(x\right)$ 是周期函数

B. $f\left(x\right)$ 的图象关于原点对称

C. $f\left(x\right)$ 的值域为 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

D. $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增

【答案】AD

【解析】

【分析】对于 A，利用周期的定义分析判断，对于 B，判断函数的奇偶性，对于 C，利用复合函数求值域的方法求解，对于 D，利用复合函数求单调性的方法求解

【详解】对于 A，因为 $f(x+2k\pi)=2^{\sin(x+2k\pi)}=2^{\sin x}=f(x)(k\in Z)$，

所以 $f\left(x\right)$ 是周期函数，所以 A 正确，

对于 B，因为 $f(-x)=2^{\sin(-x)}=2^{-\sin x}=\frac{1}{2^{\sin x}}\neq-f(x)$，

所以 $f(x)$ 不是奇函数，所以 $f(x)$ 的图象不关于原点对称，所以 B 错误，

对于 C，因为$-1\le \sin x\le 1$，所以$2^{-1}\le 2^{\sin x}\le 2^{1}$，即$\frac{1}{2}\le f(x)\le 2$，所以函数的值域为$\left[\frac{1}{2},2\right]$，

所以 C 错误，

对于 D，令$t=\sin x$，则$y=2^{t}$，因为$t=\sin x$在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上单调递，$y=2^{t}$在$R$上递增，所以$f\left(x\right)$

在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增，所以 D 正确，

故选：AD

11. P是直线$y=2$上的一个动点，过点P作圆$x^2+y^2=1$的两条切线，A，B为切点，则（　　）

A. 弦长$|AB|$的最小值为$\sqrt{3}$

B. 存在点P，使得$\angle APB=90°$

C. 直线AB经过一个定点

D. 线段AB的中点在一个定圆上

【答案】ACD

【解析】

【分析】设$AB\cap OP=C$，则C为AB的中点，且$OP\perp AB$，再根据勾股定理、等面积法及锐角三角函数得到$\left|AB\right|=2\sqrt{1-\frac{1}{\left|OP\right|^{2}}}$、$\sin\frac{\angle APB}{2}=\frac{1}{\left|OP\right|}$，根据$\left|OP\right|$的范围，即可判断 A、B，设$P\left(t,2\right)$，求出以$OP$为直径的圆的方程，两圆方程作差，即可得到切点弦方程，从而判断 C，再根据圆的定义判断 D；【详解】解：依题意$\left|OP\right|^{2}=\left|AP\right|^{2}+\left|AO\right|^{2}$，即$\left|OP\right|^{2}=\left|AP\right|^{2}+1$，设$AB\cap OP=C$，则$C$为$AB$的中点，且$OP\perp AB$，

所以$\left|AC\right|=\frac{\left|AP\right|\cdot\left|AO\right|}{\left|OP\right|}=\frac{\left|AP\right|}{\left|OP\right|}$，所以$\left|AB\right|=2\left|AC\right|=2\sqrt{1-\frac{1}{\left|OP\right|^{2}}}$，$\sin\frac{\angle APB}{2}=\frac{\left|OA\right|}{\left|OP\right|}=\frac{1}{\left|OP\right|}$，

又$\left|OP\right|\in\left[2,+\infty\right)$，

所以$\sin\frac{\angle APB}{2}\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$，$\left|AB\right|\in\left[\sqrt{3},2\right)$，所以$\left|AB\right|_{\min}=\sqrt{3}$，$\left(\angle APB\right)_{\max}=60°$，故 A 正确，

B 不正确；

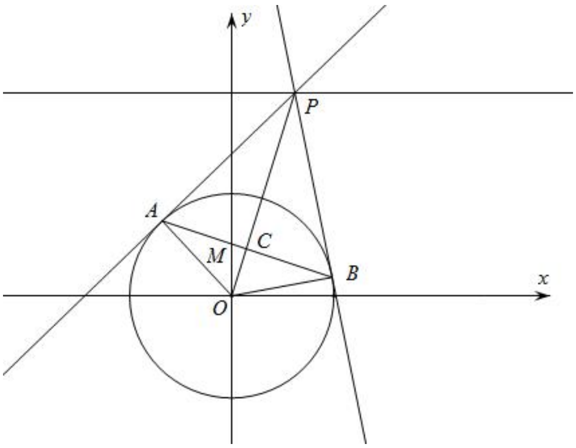
设 $P(t,2)$，则 $|OP|=\sqrt{t^2+4}$，所以以 OP 为直径的圆的方程为 $\left(x-\frac{t}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}t^2+1$，

则 $\left(x-\frac{t}{2}\right)^2+(y-1)^2-(x^2+y^2)=\frac{1}{4}t^2+1-1$，即 $tx+2y=1$，所以直线 AB 的方程为 $tx+2y=1$，

所以直线 AB 过定点 $M\left(0,\frac{1}{2}\right)$，故 C 正确；

又 $OC\perp MC$，$|OM|=\frac{1}{2}$，所以 AB 的中点 C 在以 OM 为直径的圆上，故 D 正确；

故选：ACD



12. 在平面四边形 $ABCD$ 中，$\triangle ABD$ 的面积是 $\triangle BCD$ 面积的 2 倍，又数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，当 $n\geq 2$ 时，恒有 $\overrightarrow{BD}=\left(a_{n-1}-2^{n-1}\right)\overrightarrow{BA}+\left(a_n+2^n\right)\overrightarrow{BC}$，设 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则（　　）

A. $\{a_n\}$ 为等比数列

B. $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 为递减数列

C. $\{a_n\}$ 为等差数列

D. $S_n=(5-2n)2^{n+1}-10$

【答案】BD

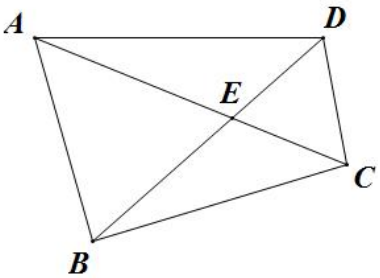
【解析】

【分析】连 AC 交 BD 于 E，根据面积关系推出 $AE=2EC$，根据平面向量知识推出

$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$，结合 $\overrightarrow{BD}=\left(a_{n-1}-2^{n-1}\right)\overrightarrow{BA}+\left(a_n+2^n\right)\overrightarrow{BC}$，推出 $a_n+2^n=2(a_{n-1}-2^{n-1})$，

$\frac{a_n}{2^n}-\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}=-2$，求出 $\frac{a_n}{2^n}=-2n+3$，$a_n=(-2n+3)\cdot 2^n$，根据等比数列的定义可判断 A；根据等差数列的定义可判断 C，根据数列的单调性可判断 B；利用错位相减法求出 S_n，可判断 D.

【详解】如图，连 AC 交 BD 于 E，



则 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle \mathrm{BCD}}}=\frac{\frac{1}{2}BD\cdot AE\cdot\sin\angle AEB}{\frac{1}{2}BD\cdot EC\cdot\sin\angle CED}=\frac{AE}{EC}=2$，即 $AE=2EC$，

所以 $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EC}$，所以 $\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BA}=2\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BE}\right)$，

所以 $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$，

设 $\overrightarrow{BD}=t\overrightarrow{BE}$ $(t>1)$，

因为当 $n\geq 2$ 时，恒有 $\overrightarrow{BD}=\left(a_{n-1}-2^{n-1}\right)\overrightarrow{BA}+\left(a_n+2^n\right)\overrightarrow{BC}$，

所以 $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{t}\left(a_{n-1}-2^{n-1}\right)\overrightarrow{BA}+\frac{1}{t}\left(a_n+2^n\right)\overrightarrow{BC}$，

$\begin{cases}\frac{1}{t}\left(a_{n-1}-2^{n-1}\right)=\frac{1}{3}\\ \frac{1}{t}\left(a_n+2^n\right)=\frac{2}{3}\end{cases}$，所以当 $n\geq 2$ 时，恒有 $a_n+2^n=2(a_{n-1}-2^{n-1})$，

所以 $\frac{a_n}{2_n}=\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}-2$，即 $\frac{a_n}{2^n}-\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}=-2$，又 $a_1=2$，所以 $\frac{a_1}{2}=1$，

所以 $\frac{a_n}{2^n}=1-2(n-1)=-2n+3$，所以 $a_n=(-2n+3)\cdot 2^n$，

因为$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(-2n+1)\cdot 2^{n+1}}{(-2n+3)\cdot 2^n}=\frac{-4n+2}{-2n+3}$不是常数，所以$\{a_n\}$不为等比数列，故 A 不正确；

因为$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=(-2n+1)-(-2n+3)=-2<0$，即$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}<\frac{a_n}{2^n}$，所以$\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$为递减数列，故 B 正确；

因为$a_{n+1}-a_n=(-2n+1)\cdot 2^{n+1}-(-2n+3)\cdot 2^n=(-2n-1)\cdot 2^n$不是常数，所以$\{a_n\}$不为等差数列，故 C 不正确；

因为$S_n=1\times 2^1+(-1)\cdot 2^2+(-3)\cdot 2^3+\cdots+(-2n+3)\cdot 2^n$，

所以$2S_n=1\times 2^2+(-1)\cdot 2^3+(-3)\cdot 2^4+\cdots+(-2n+3)\cdot 2^{n+1}$，

所以$-S_n=1\times 2^1-2(2^2+2^3+2^4+\cdots+2^n)-(-2n+3)\cdot 2^{n+1}$，

所以$-S_n=2-2\times\frac{4(1-2^{n-1})}{1-2}-(-2n+3)\cdot 2^{n+1}=10-(5-2n)\cdot 2^{n+1}$，

所以$S_n=(5-2n)\cdot 2^{n+1}-10$，故 D 正确.

故选：BD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 若“$\exists x\in[-1,3]$, $x^2-2x+a<0$”为假命题, 则实数 a 的最小值为______________.

【答案】1

【解析】

【解答】解：∵“$\exists x\in[-1,3]$, $x^2-2x+a<0$”为假命题, ∴$\forall x\in[-1,3]$, $x^2-2x+a\geqslant 0$为真命题；得

$a\geqslant -x^2+2x=-(x-1)^2+1$, 而函数 $y=-x^2+2x=-(x-1)^2+1$, 由$\exists x\in[-1,3]$，得

$y\in[-3,1]$, ∴$a\geqslant 1$，即实数 a 的最小值是 1.

14. 已知$0<\theta<\pi$，向量$\vec{a}=\left(\sin\theta,2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)$，$\vec{b}=(1,\sin\theta)$，且$\vec{a}\,//\,\vec{b}$，则$\theta$=______________.

【答案】$\frac{\pi}{2}$

【解析】

【分析】由向量共线的坐标运算可得答案.

【详解】因为$\vec{a}//\vec{b}$，所以$\sin^2\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}$，

所以$4\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}=2\cos^2\frac{\theta}{2}$，

因为$0<\theta<\pi$，$\cos\frac{\theta}{2}\neq 0$，

所以$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2},\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

因为$0<\theta<\pi$，所以$\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{4}$， $\theta=\frac{\pi}{2}$.

故答案为：$\frac{\pi}{2}$.

15. 已知$a>0$，$b>0$，直线$y=x+a$与曲线$y=\mathrm{e}^{x-1}-2b+1$相切，则$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$的最小值为

__________.

【答案】8

【解析】

【分析】设直线$y=x+a$与曲线$y=e^{x-1}-2b+1$相切于点$\left(x_0,y_0\right)$，根据导数的几何意义先求出x_0，进而得到关系$a+2b=1$，再由均值不等式可得出答案.

【详解】设直线$y=x+a$与曲线$y=e^{x-1}-2b+1$相切于点$\left(x_0,y_0\right)$

由函数$y=e^{x-1}-2b+1$的导函数为$y'=e^{x-1}$，则$k=y'|_{x=x_0}=\mathrm{e}^{x_0-1}=1$

解得$x_0=1$

所以$y_0=1+a=2-2b$，即$a+2b=1$

则$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=\left(a+2b\right)\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)=4+\frac{4b}{a}+\frac{a}{b}\geq 4+2\sqrt{\frac{4b}{a}\times\frac{a}{b}}=8$

当且仅当$\frac{4b}{a}=\frac{a}{b}$，即$a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{4}$时取得等号.

故答案为：8

16. 《缀术》是中国南北朝时期的一部算经，汇集了祖冲之和祖暅父子的数学研究成果.《缀术》中提出的“缘幂势既同，则积不容异”被称为祖暅原理，其意思是：如果两等高的几何体在同高处被截得的两截面面积均相等，那么这两个几何体的体积相等，该原理常应用于计算某些几何体的体积.如图，某个西晋越窑卧足杯的上下底为互相平行的圆面，侧面为球面的一部分，上底直径为 $4\sqrt{6}$ cm，下底直径为 $6cm$，上下底面间的距离为3cm，则该卧足杯侧面所在的球面的半径是________ cm；卧足杯的容积是________ cm^3（杯的厚度忽略不计）.

【答案】 ①. 5 ②. 54π

【解析】

【分析】设球体的半径为 R，$OO_1=x$，得到 $x^2+\left(2\sqrt{6}\right)^2=\left(x+3\right)^2+3^2$，解出 x，求出球体半径；由祖暅原理知，碗的体积等于下图右边中间高为3的圆柱体积减去一个圆台，分别求出圆柱和圆台的容积，作差即可求解.

【详解】如下图：设球体的半径为 R，$OO_1=x$，由 $OM^2=ON^2=R^2$ 得，

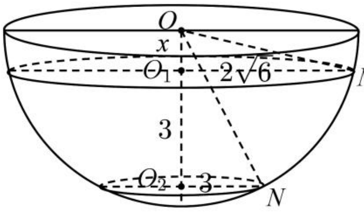
$x^2+\left(2\sqrt{6}\right)^2=\left(x+3\right)^2+3^2$，解得 x=1，所以 $R=\sqrt{\left(OO_1\right)^2+\left(O_1M\right)^2}=5$；

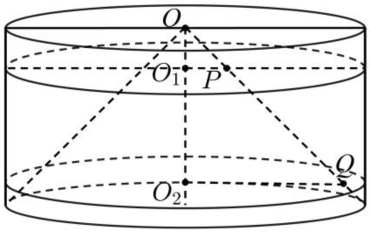
由祖暅原理知，碗的体积等于下图右边中间高为3的圆柱体积减去一个圆台，

设圆台上表面半径为 r_1，则 $r_1=O_1P=OO_1=1$，下表面半径为 r_2，所以 $r_2=O_2O=O_2Q=4$，

$V_{圆台}=\frac{1}{3}\pi h\left(r_2^2+r_1^2+r_1r_2\right)=21\pi$，$V_{碗}=V_{圆柱}-V_{圆台}=\pi R^2h-21\pi=54\pi$.

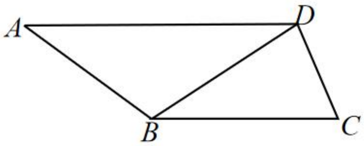
故答案为：5；54π.





四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）如图，在四边形 $ABCD$ 中， $BD < AD, \sin\left(\frac{\pi}{3}-\angle A\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+\angle A\right)=\frac{1}{4}$.



（1）求 $\angle A$；

（2）若 $AB=\sqrt{3}, AD=3, CD=1, \angle C=2\angle CBD$，求四边形 $ABCD$ 的面积.

【答案】（1） $\angle A=\frac{\pi}{6}$；

（2） $\frac{5\sqrt{3}}{4}$.

【解析】

【分析】（1）利用诱导公式和二倍角公式得到 $\cos\left(\frac{2\pi}{3}-2\angle A\right)=\frac{1}{2}$，再判断出 $\left(\frac{2\pi}{3}-2\angle A\right)\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$，即可求出 $\angle A=\frac{\pi}{6}$；

（2）由余弦定理求出 $BD=\sqrt{3}$.由正弦定理得到 $\sin\angle C=\sqrt{3}\sin\angle CBD$，从而求出 $\cos\angle CBD=\frac{\sqrt{3}}{2}$，得到 $\angle CBD=\frac{\pi}{6}$ 和 $\angle BDC=\frac{\pi}{2}$，进而求出四边形 $ABCD$ 的面积.

【小问 1 详解】

因为 $\left(\frac{\pi}{3}-\angle A\right)+\left(\frac{\pi}{6}+\angle A\right)=\frac{\pi}{2}$,所以 $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\angle A\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\angle A\right)$,

所以$\sin\left(\frac{\pi}{3}-\angle A\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+\angle A\right)=\frac{1}{4}$可化为$\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-\angle A\right)=\frac{1}{4}$，

由二倍角公式可得：$\cos\left(\frac{2\pi}{3}-2\angle A\right)=\frac{1}{2}$

因为 $BD<AD$,所以 $\angle A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以$\left(\frac{2\pi}{3}-2\angle A\right)\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$，

所以$\frac{2\pi}{3}-2\angle A=\frac{\pi}{3}$,解得$\angle A=\frac{\pi}{6}$.

【小问 2 详解】

在$\triangle ABD$中，$AB=\sqrt{3},AD=3$ ，$\angle A=\frac{\pi}{6}$，由余弦定理得：

$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos\angle A$,即$BD^2=3+9-2\times\sqrt{3}\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$

所以$BD=\sqrt{3}$.

在$\triangle BCD$中,由正弦定理得$\frac{\sin\angle C}{\sin\angle CBD}=\frac{BD}{CD}=\sqrt{3}$，所以$\sin\angle C=\sqrt{3}\sin\angle CBD$.

又因为$\angle C=2\angle CBD$,所以$\cos\angle CBD=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又因为$\angle CBD\in(0,\pi)$,所以$\angle CBD=\frac{\pi}{6}$,从而$\angle C=2\angle CBD=\frac{\pi}{3}$，所以$\angle BDC=\frac{\pi}{2}$,.

因此四边形 $ABCD$ 的面积$S=\frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\sin\angle A+\frac{1}{2}BD\cdot CD=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times3\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times1=\frac{5\sqrt{3}}{4}$.

18.（12 分）

已知正项等差数列$\{a_n\}$满足：$a_{3n}=3a_n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，且$2a_1,a_3+1,a_8$成等比数列.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$c_n=\frac{2^{a_{n+1}}}{\left(1+2^{a_n}\right)\left(1+2^{a_{n+1}}\right)}$，$R_n$是数列$\{c_n\}$的前 n 项和，若对任意$n\in\mathbf{N}^*$均有$R_n<\lambda$恒成立，

求 λ 的最小值.

【答案】（1）$a_n = n$

（2）最小值为 $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】(1) 设等差数列的公差为 d，由 $a_{3n} = 3a_n$ 及等差数列的通项公式得到 $a_1 = d$，则 $a_n = nd$，再根据等比中项的性质得到方程，求出 d，即可得解；

（2）由（1）可得 $c_n = 2\left(\frac{1}{1+2^n} - \frac{1}{1+2^{n+1}}\right)$，利用裂项相消法求和得到 R_n，即可得到 $R_n < \frac{2}{3}$，从而求出 λ 的取值范围，即可得解；

【小问 1 详解】

解：设等差数列的公差为 d，由 $a_{3n} = 3a_n$ 得 $a_1 + (3n-1)d = 3\left[a_1 + (n-1)d\right]$，则 $a_1 = d$，

所以 $a_n = a_1 + (n-1)d = nd$.

因为 $2a_1$、$a_3 + 1$、a_8 成等比数列，所以 $\left(a_3 + 1\right)^2 = 2a_1 \cdot a_8$，即 $(3d+1)^2 = 2d \cdot 8d$，

所以 $7d^2 - 6d - 1 = 0$，解得 $d = 1$ 或 $d = -\frac{1}{7}$，因为 $\{a_n\}$ 为正项数列，所以 $d > 0$，所以 $d = 1$，

所以 $a_n = n$.

【小问 2 详解】

解：由（1）可得 $c_n = \frac{2^{a_{n+1}}}{\left(1+2^{a_n}\right)\left(1+2^{a_{n+1}}\right)} = \frac{2^{n+1}}{\left(1+2^n\right)\left(1+2^{n+1}\right)} = 2\left(\frac{1}{1+2^n} - \frac{1}{1+2^{n+1}}\right)$，

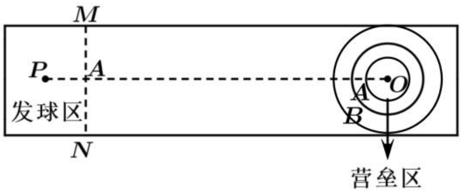
所以 $R_n = 2\left[\left(\frac{1}{1+2^1} - \frac{1}{1+2^2}\right) + \left(\frac{1}{1+2^2} - \frac{1}{1+2^3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{1+2^n} - \frac{1}{1+2^{n+1}}\right)\right] = 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{1+2^{n+1}}\right)$，

因为对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 均有 $R_n < \frac{2}{3}$，所以 $\lambda \geq \frac{2}{3}$，所以实数 λ 的最小值为 $\frac{2}{3}$

19.（12 分）

冰壶是 2022 年 2 月 4 日至 2 月 20 日在中国举行的第 24 届冬季奥运会的比赛项目之一．冰壶比赛的场地如图所示，其中左端（投掷线 MN 的左侧）有一个发球区，运动员在发球区边沿的投掷线

MN 将冰壶掷出，使冰壶沿冰道滑行，冰道的右端有一圆形的营垒，以场上冰壶最终静止时距离营垒区圆心 O 的远近决定胜负，甲、乙两人进行投掷冰壶比赛，规定冰壶的重心落在圆 O 中，得 3 分，冰壶的重心落在圆环 A 中，得 2 分，冰壶的重心落在圆环 B 中，得 1 分，其余情况均得 0 分. 已知甲、乙投掷冰壶的结果互不影响，甲、乙得 3 分的概率分别为 $\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$；甲、乙得 2 分的概率分别为 $\frac{2}{5}$，$\frac{1}{2}$；甲、乙得 1 分的概率分别为 $\frac{1}{5}$，$\frac{1}{6}$.



（1）求甲、乙两人所得分数相同的概率；

（2）设甲、乙两人所得的分数之和为 X，求 X 的分布列和期望.

【答案】（1）$\frac{29}{90}$

（2）分布列见解析；期望为 $\frac{47}{12}$

【解析】

【分析】（1）求出甲乙二人都得 0 分的概率，然后由两人同时得 0 分、1 分、2 分、3 分计算概率并相加即可；

（2）由题意 X 可能取值为 0，1，2，3，4，5，6，分别计算出概率得分布列，由期望公式计算期望.

【小问 1 详解】

由题意知甲得 0 分的概率为 $1-\frac{1}{3}-\frac{2}{5}-\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$，

乙得 0 分的概率为 $1-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$，

所以甲、乙两人所得分数相同的概率为$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{15}\times\frac{1}{12}=\frac{29}{90}$.

【小问 2 详解】

X可能取值为 0，1，2，3，4，5，6，

则$P\left(X=0\right)=\frac{1}{15}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{180}$,

$$P\left(X=1\right)=\frac{1}{15}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{36},$$

$$P\left(X=2\right)=\frac{1}{15}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{6}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{10},$$

$$P\left(X=3\right)=\frac{1}{15}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{12}=\frac{19}{90},$$

$$P\left(X=4\right)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{11}{36},$$

$$P\left(X=5\right)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{15},$$

$$P\left(X=6\right)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12},$$

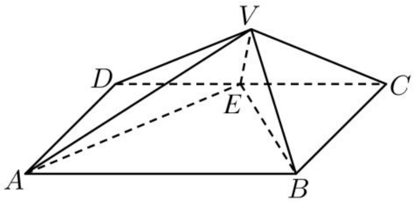
所以，随机变量X的分布列为：

X	0	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{180}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{19}{90}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{12}$

所以$E\left(X\right)=0\times\frac{1}{180}+1\times\frac{1}{36}+2\times\frac{1}{10}+3\times\frac{19}{90}+4\times\frac{11}{36}+5\times\frac{4}{15}+6\times\frac{1}{12}=\frac{47}{12}$.

20.（12 分）

如图，在四棱锥$V-ABCD$中，底面$ABCD$为矩形，$AB=2BC=4$，E为CD的中点，且$\triangle VBC$为等边三角形.



（1）若 $VB \perp AE$，求证：$AE \perp VE$；

（2）若二面角 $A-BC-V$ 的大小为30°，求直线 AV 与平面 VCD 所成角的正弦值．

【答案】（1）证明见解析

（2）$\dfrac{\sqrt{42}}{14}$

【解析】

【分析】（1）先证明线面垂直，再证明线线垂直即可；

（2）建立空间直角坐标系，以向量的方法去求直线 AV 与平面 VCD 所成角的正弦值．

【小问 1 详解】

因为 E 为 CD 的中点，所以 $AD=DE=2$，所以$\triangle ADE$ 为等腰直角三角形，

所以 $\angle AED=45^{\circ}$．同理，$\angle BEC=45^{\circ}$．所以 $AE \perp BE$．

又因为 $VB \perp AE$，且$VB \cap BE=B$，$VB \subset$ 面 VBE，$BE \subset$ 面 VBE，

所以 $AE \perp$ 面 VBE．

因为$VE \subset$ 面 VBE，所以 $AE \perp VE$．

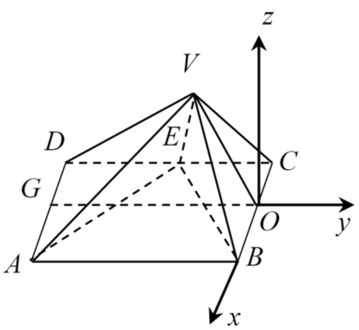
【小问 2 详解】

取 BC 中点 O，AD 中点 G、连接 OG，VO，则 $OG \perp BC$．

又$\triangle VBC$ 为等边三角形，所以 $VO \perp BC$，

所以$\angle GOV$ 为二面角 $A-BC-V$ 的平面角．所以 $\angle GOV=30^{\circ}$

以 $\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{GO}$ 方向分别作为 x，y 轴正方向，建立空间直角坐标系 $O-xyz$．



于是 A（1，−4，0），C（−1，0，0），D（−1，−4，0），$V\left(0,-\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

$\overrightarrow{DC}=(0,4,0)$，$\overrightarrow{CV}=\left(1,-\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{AV}=\left(-1,\dfrac{5}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

令 $\vec{n}=(x,y,z)$ 为平面 VCD 的一个法向量，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CV}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}4y=0\\ x-\dfrac{3}{2}y+\dfrac{\sqrt{3}}{2}z=0\end{cases}$，令 z＝2，得 $\vec{n}=(-\sqrt{3},0,2)$.

设直线 AV 与平面 VCD 所成的角为 α，则

$\sin\alpha=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{AV},\vec{n}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{AV}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{AV}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}\times\sqrt{8}}=\dfrac{\sqrt{42}}{14}$，

故直线 AV 与平面 VCD 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{42}}{14}$.

21.（12 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，过 C 的右顶点 A 的直线 l 与 C 的另一交点为 P.当 P 为 C 的上顶点时，原点到 l 的距离为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

（1）求 C 的标准方程；

（2）过 A 与 l 垂直的直线交抛物线 $y^2=8x$ 于 M,N 两点，求 $\triangle PMN$ 面积的最小值.

【答案】（1）$\frac{x^2}{4}+y^2=1$

（2）9

【解析】

【分析】（1）利用点到直线距离、离心率和椭圆 a,b,c 关系可构造方程组求得 a,b，由此可得椭圆方程；

（2）当直线 l 斜率为 0 时，易求得 $S_{\triangle PMN}=16$；当直线 l 斜率不为 0 时，分别将直线 l 与椭圆、直线 MN 与抛物线方程联立，求得 $|AP|,|MN|$，进而得到 $S_{\triangle PMN}=\frac{1}{2}|AP|\cdot|MN|=\frac{16\left(k^2+1\right)\cdot\sqrt{k^2+1}}{1+4k^2}$，采用换元法，令 $t=\sqrt{k^2+1}$，利用导数可求得最小值；综合两种情况可得所求面积的最小值.

【小问 1 详解】

由题意知：$A\left(a,0\right)$，

若 P 为 C 的上顶点，则 $P\left(0,b\right)$，$\therefore l:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，即 $bx+ay-ab=0$，

$\therefore$ 原点到 l 的距离 $d=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

又离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$a^2=b^2+c^2$，$\therefore a=2$，$b=1$，$\therefore$ 椭圆 C 的标准方程为：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

【小问 2 详解】

由题意知：直线 l 斜率存在；

①当直线 l 斜率为 0 时，$l:y=0$，$P\left(-2,0\right)$；此时直线 $MN:x=2$，

则 $M\left(2,4\right)$，$N\left(2,-4\right)$，$\therefore S_{\triangle PMN}=\frac{1}{2}|MN|\cdot|PA|=\frac{1}{2}\times8\times4=16$；

②当直线 l 斜率存在且不为 0 时，$l:y=k\left(x-2\right)$，

由$\begin{cases} y=k(x-2) \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$得：$(1+4k^2)x^2-16k^2x+16k^2-4=0$，

又$A(2,0)$，$\therefore x_P=\dfrac{8k^2-2}{1+4k^2}$，则$y_P=-\dfrac{6k}{1+4k^2}$，$\therefore P\left(\dfrac{8k^2-2}{1+4k^2},-\dfrac{4k}{1+4k^2}\right)$；

又直线$MN: y=-\dfrac{1}{k}(x-2)$，

由$\begin{cases} y=-\dfrac{1}{k}(x-2) \\ y^2=8x \end{cases}$得：$x^2-(8k^2+4)x+4=0$，$\therefore x_M+x_N=8k^2+4$；

$\because y^2=8x$的焦点为$A(2,0)$，$\therefore |MN|=x_M+x_N+4=8k^2+8$，

又$|AP|=\sqrt{\left(\dfrac{8k^2-2}{1+4k^2}-2\right)^2+\left(-\dfrac{4k}{1+4k^2}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{k^2+1}}{1+4k^2}$，

$\therefore S_{\triangle PMN}=\dfrac{1}{2}|AP|\cdot|MN|=\dfrac{16(k^2+1)\cdot\sqrt{k^2+1}}{1+4k^2}$，

设$\sqrt{k^2+1}=t>1$，则$k^2=t^2-1$，$\therefore S_{\triangle PMN}=\dfrac{16t^3}{4t^2-3}(t>1)$，

令$f(t)=\dfrac{16t^3}{4t^2-3}$，则$f'(t)=\dfrac{48t^2(4t^2-3)-16t^3\cdot 8t}{(4t^2-3)^2}=\dfrac{16t^2(2t+3)(2t-3)}{(4t^2-3)^2}$，

$\therefore$当$t\in\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$时，$f'(t)<0$；当$t\in\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$时，$f'(t)>0$；

$\therefore f(t)$在$\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$上单调递减，在$\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$上单调递增，$\therefore f(t)_{\min}=f\left(\dfrac{3}{2}\right)=9$，

即$(S_{\triangle PMN})_{\min}=9$；

综上所述：$\triangle PMN$面积的最小值为9.

【点睛】思路点睛：求解直线与圆锥曲线综合应用中的三角形面积最值（取值范围）问题的基本思路如下：

①假设直线方程，与曲线方程联立，整理为关于 x 或 y 的一元二次方程的形式；

②利用 $\Delta>0$ 求得变量的取值范围，得到韦达定理的形式；

③结合弦长公式、点到直线距离公式等知识，利用变量表示出所求三角形的面积；

④将所求三角形面积转化为关于变量的函数的形式，利用函数的单调性或基本不等式求解出最值（范围）.

22.（12 分）

已知函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-\frac{1}{2}ax^{2}-2ax$，其中 $a\in\mathrm{R}$.

（1）若函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,+\infty\right)$ 上单调递增，求 a 的取值范围；

（2）若函数 $f\left(x\right)$ 存在两个极值点 $x_1,x_2\left(x_1<x_2\right)$，当 $x_1+x_2\in\left[\frac{5-3\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1},2\ln3-4\right]$ 时，求 $\frac{x_2+2}{x_1+2}$ 的取值范围.

【答案】（1）$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$

（2）$\left[\mathrm{e},3\right]$

【解析】

【分析】（1）求出 $f'\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-ax-2a$，由函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,+\infty\right)$ 上单调递增，转化为 $\frac{\mathrm{e}^{x}}{x+2}\geq a$ 在 $\left[0,+\infty\right)$ 上恒成立. 令 $g\left(x\right)=\frac{\mathrm{e}^{x}}{x+2},x\in\left[0,+\infty\right)$，利用导数判断出 $g\left(x\right)=\frac{\mathrm{e}^{x}}{x+2}$ 在 $\left[0,+\infty\right)$ 上单调递增，求出 $g\left(x\right)\geq\frac{1}{2}$，即可求出 a 的取值范围；

(2) 先判断出 $a>\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时 $f\left(x\right)$ 有两个极值点 x_1,x_2，且 $-2<x_1<-1<x_2$. 得到 $\frac{x_2+2}{x_1+2}=\mathrm{e}^{x_2-x_1}$. 令 $t=\frac{x_2+2}{x_1+2}$，则 $t\in\left(1,+\infty\right)$，得到 $x_1+2=\frac{\ln t}{t-1},x_2+2=\frac{t\ln t}{t-1}$，$x_1+x_2=\frac{(t+1)\ln t}{t-1}-4$. 令

$m(t)=\frac{(t+1)\ln t}{t-1}-4$, 利用二次求导判断出 $m(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递增. 求出 $t\in[\mathrm{e},3]$，得到 $\frac{x_2+2}{x_1+2}$ 的取值范围是 $[\mathrm{e},3]$.

【小问 1 详解】

因为 $f(x)=\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}ax^2-2ax$，所以 $f'(x)=\mathrm{e}^x-ax-2a$，

因为函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f'(x)=\mathrm{e}^x-ax-2a\geq 0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $\frac{\mathrm{e}^x}{x+2}\geq a$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，

故令 $g(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x+2},x\in[0,+\infty)$，则 $g'(x)=\frac{(x+1)\mathrm{e}^x}{(x+2)^2}>0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $g(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x+2}$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，故 $g(x)\geq g(0)=\frac{1}{2}$，

所以 $a\leq\frac{1}{2}$，即 a 的取值范围是 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$.

【小问 2 详解】

$f'(x)=\mathrm{e}^x-ax-2a$.

对函数 $h(x)=\mathrm{e}^x,h'(x)=\mathrm{e}^x$，设 $h(x)$ 上一点为 $\left(x_0,\mathrm{e}^{x_0}\right)$，

过点 $\left(x_0,\mathrm{e}^{x_0}\right)$ 的切线方程为 $y-\mathrm{e}^{x_0}=\mathrm{e}^{x_0}(x-x_0)$，

将 $(-2,0)$ 代入上式得 $-\mathrm{e}^{x_0}=\mathrm{e}^{x_0}(-2-x_0)\Rightarrow x_0=-1$，

所以过 $(-2,0)$ 的 $h(x)$ 的切线方程为 $y-\frac{1}{\mathrm{e}}=\frac{1}{\mathrm{e}}(x+1),y=\frac{1}{\mathrm{e}}x+\frac{2}{\mathrm{e}}$

所以，要使 $y=\mathrm{e}^x$ 与 $y=ax+2a$ 有两个交点，则 $a>\frac{1}{\mathrm{e}}$.

此时 $f(x)$ 有两个极值点 x_1,x_2，且 $-2<x_1<-1<x_2$.

$\begin{cases}e^{x_1}-ax_1-2a=0\\e^{x_2}-ax_2-2a=0\end{cases},\begin{cases}e^{x_1}=ax_1+2a\\e^{x_2}=ax_2+2a\end{cases}\Rightarrow\dfrac{x_2+2}{x_1+2}=e^{x_2-x_1}$,

令 $t=\dfrac{x_2+2}{x_1+2}$，则 $t\in(1,+\infty)$，所以 $e^{tx_1-x_1+2t-2}=t$，

所以 $tx_1-x_1+2t-2=\ln t$，即 $x_1+2=\dfrac{\ln t}{t-1},x_2+2=\dfrac{t\ln t}{t-1}$，所以 $x_1+x_2=\dfrac{(t+1)\ln t}{t-1}-4$，

令 $m(t)=\dfrac{(t+1)\ln t}{t-1}-4,m'(t)=\dfrac{t-2\ln t-\frac{1}{t}}{(t-1)^2}$，令

$n(t)=t-2\ln t-\dfrac{1}{t},n'(t)=1-\dfrac{2}{t}+\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{(t-1)^2}{t^2}>0$，

所以 $n(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递增.

因为 $n(1)=0$，所以 $n(t)>0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立.所以 $m'(t)>0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立.

所以 $m(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递增.

又 $m(3)=2\ln 3-4,m(e)=\dfrac{5-3e}{e-1}$，

所以当 $m(t)\in\left[\dfrac{5\text{-}3e}{e-1},2\ln 3-4\right]$ 时，$t\in[e,3]$，

所以 $\dfrac{x_2+2}{x_1+2}$ 的取值范围是 $[e,3]$.

【点睛】导数是研究函数的单调性、极值(最值)最有效的工具，而函数是高中数学中重要的知识点，对导数的应用的考查主要从以下几个角度进行：

(1)考查导数的几何意义，往往与解析几何、微积分相联系．

(2)利用导数求函数的单调区间，判断单调性；已知单调性，求参数．

(3)利用导数求函数的最值(极值)，解决生活中的优化问题．