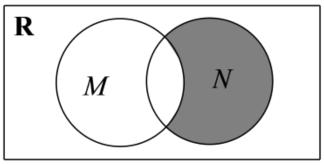
江苏省仪征中学 2022-2023 学年度第一学期高三数学综合训练（10）

一、单项选择题. 本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 正确表示图中阴影部分的是（　　）



A. $\complement_R M\cup N$　　B. $\complement_R M\cap N$

C. $\complement_R(M\cup N)$　　D. $\complement_R(M\cap N)$

2. 棣莫弗公式 $(\cos x+\mathrm{i}\sin x)^n=\cos nx+\mathrm{i}\sin nx$（其中 i 为虚数单位）是由法国数学家棣莫弗（1667-1754 年）发现的，根据棣莫弗公式可知，复数 $\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)^7$ 在复平面内所对应的点位于（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

3. “$a=0$”是“函数 $f(x)=\sin x+a\cos^2 x$”为奇函数的（　　）

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件　　C.充要条件　　D.既不充分也不必要条件

4. 函数 $f(x)=\frac{2}{3}x^3-2x^2+\frac{1}{3}$ 的图象在 $x=1$ 处的切线方程为（　　）

A. $y=-2x+1$　　B. $y=-x$　　C. $y=-x+1$　　D. $y=-2x+3$

5. $(x-y+2)^5$ 的展开式中，x^3y 的系数为（　　）

A. 80　　B. 40　　C. -80　　D. -40

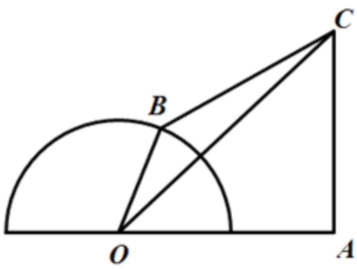
6. 在劳动技术课上某小组同学用游标卡尺测量一个高度为 7 毫米的零件 50 次时，所得数据如下：

测量值	6.8 毫米	6.9 毫米	7.0 毫米	7.1 毫米	7.2 毫米
次数	5	15	10	15	5

根据此数据推测，假如再用游标卡尺测量该零件 2 次，则 2 次测得的平均值为 7.1 毫米的概率为（　　）

A. 0.04　　B. 0.11　　C. 0.13　　D. 0.26

7. 克罗狄斯 托勒密（*Ptolemy*）所著的《天文集》中讲述了制作弦表的原理，其中涉及如下定理：任意凸四边形中，两条对角线的乘积小于或等于两组对边乘积之和，当且仅当对角互补时取等号，根据以上材料，完成下题：如图，半圆 O 的直径为 2，A 为直径延长线上的一点，$OA=2$，B 为半圆上一点，以 AB 为一边作等边三角形 ABC，则当线段 OC 的长取最大值时，$\angle AOC=$（ ）



A. 30°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 90°

8. 已知$a=\mathrm{e}^{0.01}$，$b=\ln 1.01\mathrm{e}$，$c=2\cos 1.1$，则（　　）

A. $b>a>c$　　B. $a>b>c$　　C. $a>c>b$　　D. $c>a>b$

二、多项选择题. 本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 下列说法中，正确的命题是（　　）

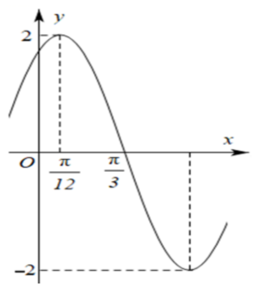
A. 已知随机变量 X 服从正态分布 N（2，σ^2），P（X<4）=0.8，则 P（2<X<4）=0.2

B. 线性相关系数 r 越大，两个变量的线性相关性越强，反之，线性相关性越弱

C. 已知两个变量具有线性相关关系，其回归方程　$y=\hat{a}+\hat{b}x$，若 $\hat{b}=2,\overline{x}=1$，$\overline{y}=3$，则 $\hat{a}=1$

D. 若样本数据 $2x_1+1$，$2x_2+1$，……，$2x_{10}+1$ 的方差为 8，则数据 x_1,x_2，…，x_{10} 的方差为 2

10. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\phi|<\dfrac{\pi}{2})$ 的部分图像如图所示，下列说法正确的是（　　）



A. 函数 $f(x)$ 的图像关于点 $\left(-\dfrac{\pi}{6},0\right)$ 中心对称

B. 函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=-\dfrac{5\pi}{12}$ 对称

C. 函数 $f(x)$　$\left[-\dfrac{2\pi}{3},-\dfrac{\pi}{6}\right]$ 上单调递减

D. 函数 $f(x)$ 的图像向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位可得函数 $y=2\sin 2x$ 的图像

11. 已知直线 $y=kx$（$k\neq 0$）与双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,\quad b>0)$ 交于 A，B 两点，以 AB 为直径　圆恰好经过双曲线的右焦点 F，若三角形 ABF 的面积为 $4a^2$，则以下正确的结论有（　　）

A. 双曲线的离心率为 2　　B. 双曲线的离心率为 $\sqrt{5}$

C. 双曲线的渐近线方程为 $y=\pm 2x$　　D. $k=\pm\dfrac{4}{3}$

12. 华人数学家李天岩和美国数学家约克给出了“混沌”的数学定义，由此发展的混沌理论在生物学、经济学和社会学领域都有重要作用.在混沌理论中，函数的周期点是一个关键概念，定义如下：设 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的函数，对于 $x\in\mathbf{R}$，令 $x_n=f(x_{n-1})(n=1,2,3,\cdots)$，若存在正整数 k 使得 $x_k=x_0$，且当 0<j<k 时，$x_j\neq x_0$，则称 x_0 是 $f(x)$ 的一个周期为 k 的周期点.若 $f(x)=\begin{cases}2x, & x<\dfrac{1}{2}\\ 2(1-x), & x\geqslant\dfrac{1}{2}\end{cases}$，下列各值是 $f(x)$ 周期为 2 的周期点的有（　　）

A. 0　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. 1

三、填空题. 本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 抛物线$C:x^2=4ay$的焦点坐标为$\left(0,2\right)$，则 C 的准线方程为______.

14. 已知实数 x 满足 $log_{0.5}x>1$，则函数 $y=8x+\dfrac{1}{2x-1}$的最大值为_____

15. 设函数 $y=\cos 2x\left(x\geq 0\right)$ 和函数 $y=\cos 10x\left(x\geq 0\right)$ 的图象的公共点的横坐标从小到大依次为 x_1，x_2，…，x_n，若 $\tan\left(x_3-\alpha\right)=\cos x_4$，则 $\sin 2\alpha=$___________.

16. 已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右顶点为 A， 以 A 为圆心，b 为半径的圆与双曲线的一条渐近线交于M,N两点，若$\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{ON}$（其中 O 为坐标原点），则双曲线的离心率为_________.

四、解答题. 本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. （本小题满分 10 分）

在ΔABC中，角 A,B,C 的对边分别为a,b,c，ΔABC的面积为S，$a\cos\dfrac{B}{2}=b\sin A$.

（1）求B；

（2）若$b=5$，______________，求S .

请在① $a=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$，② $\tan(A+\dfrac{\pi}{4})=2+\sqrt{3}$，③ $b^2+c^2=a^2+bc$ 这三个条件中任选一个，补充在上面的问题中，并加以解答.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

18.（本小题满分 12 分）

已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足$a_1=\dfrac{1}{2}$，$S_n=1-2a_{n+1},n\in N^*$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式;

（2）若$b_n=\log_{\frac{1}{2}}a_n$，且$c_n=\dfrac{1}{4{b_n}^2-1}$，求数列$\{c_n\}$的前$n$项和$T_n$.

19.（本小题满分 12 分）

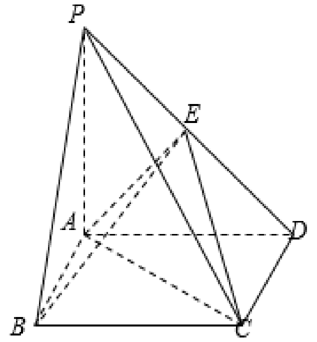
如图，在四棱锥$P-ABCD$中，四边形$ABCD$是长方形，

平面$PAB\perp$平面$ABCD$，平面$PAD\perp$平面$ABCD$，

（1）证明：$PA\perp$平面 $ABCD$；

（2）若$PA=AD=2,AB=3$，E为PD中点，

求二面角$A-BE-C$的余弦值.



20.（本小题满分 12 分）

为了了解扬州市高中生周末运动时间，随机调查了3000名学生，统计了他们的周末运动时间，制成如下的频率分布表：

周末运动时间t（分钟）	$[30,40)$	$[40,50)$	$[50,60)$	$[60,70)$	$[70,80)$	$[80,90]$
人数	300	600	900	450	450	300

（1）从周末运动时间在$[70,80)$的学生中抽取3人，在$[80,90]$的学生中抽取2人，现从这5人中随机推荐2人参加体能测试，记推荐的2人中来自$[70,80)$的人数为X，求X的分布列和数学期望；

（2）由频率分布表可认为：周末运动时间t服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，其中μ为周末运动时间的平均数$\overline{t}$，σ近似为样本的标准差s，并已求得$s\approx 14.6$．可以用该样本的频率估计总体的概率，现从扬州市所有高中生中随机抽取10名学生，记周末运动时间在$(43.9,87.7]$之外的人数为Y，求$P(Y=2)$（精确到0.001）；

参考数据 1：当$t\sim N(\mu,\sigma^2)$时，$P(\mu-\sigma<t<\mu+\sigma)=0.6827, P(\mu-2\sigma<t<\mu+2\sigma)=0.9545,$

$P(\mu-3\sigma<t<\mu+3\sigma)=0.9973$.

参考数据 2：$0.8186^8\approx 0.202, 0.1814^2\approx 0.033$

21.（本小题满分 12 分）

已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{1}{2}$，左右顶点分别为$A,B$，上下顶点分别为$C,D$，四边形$ACBD$的面积为$4\sqrt{3}$，

（1）求椭圆的方程；

（2）过椭圆的右焦点F的直线l与椭圆交于P，Q两点，直线PB、QB分别交直线$x=4$于M,N两点，判断$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BN}$是否为定值，并说明理由.

22.（本小题满分 12 分）

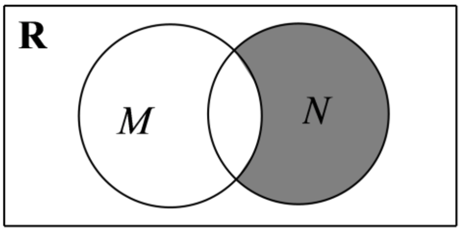
已知函数$f(x)=e^x-a\ln x$，（其中a为参数）

（1）若$a=1$，且直线$y=kx+1$与$y=f(x)$的图象相切，求实数k的值；

（2）若对任意$x\in(0,+\infty)$，不等式$f(x)>a\ln a$成立，求正实数a的取值范围.

一、单项选择题

1. 正确表示图中阴影部分的是（　　）



A. $\complement_R M \cup N$　　　　B. $\complement_R M \cap N$

C. $\complement_R$（$M \cup N$）　　　　D. $\complement_R$（$M \cap N$）

【答案】B

【解析】

【分析】根据韦恩图直接分析即可

【详解】图中阴影部分为 M 的补集与集合 N 相交的部分，即 $\complement_R M \cap N$，

故选：B.

【点睛】本题主要考查了韦恩图分析交并补集的问题，属于基础题

2. 棣莫弗公式 $(\cos x+\mathrm{i}\sin x)^n=\cos nx+\mathrm{i}\sin nx$（其中 i 为虚数单位）是由法国数学家棣莫弗（1667-1754 年）发现的，根据棣莫弗公式可知，复数 $\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)^7$ 在复平面内所对应的点位于（　　）

A. 第一象限　　　　B. 第二象限

C. 第三象限　　　　D. 第四象限

【答案】C

【解析】

【分析】根据棣莫弗公式及诱导公式代入计算即可.

详解：由已知得 $\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)^7=\cos\frac{7\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{6}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$，

$\therefore$ 复数 $\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)^7$ 在复平面内所对应的点的坐标为 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$，位于第三象限.

故选：C.

3. “$a=0$”是“函数 $f(x)=\sin x+a\cos^2 x$”为奇函数的（　　）

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件　　C.充要条件　　D.既不充分也不必要条件

【答案】C

4. 函数 $f(x)=\frac{2}{3}x^3-2x^2+\frac{1}{3}$ 的图象在 $x=1$ 处的切线方程为（　　）

A. $y=-2x+1$　　B. $y=-x$　　C. $y=-x+1$　　D. $y=-2x+3$

【答案】A

【解析】

【分析】求出函数的导数，得到切点纵坐标和切线斜率，然后得切线方程.

【详解】解：因为 $f(x)=\frac{2}{3}x^3-2x^2+\frac{1}{3}$

所以 $f'(x)=2x^2-4x$，所以 $f(1)=\frac{2}{3}-2+\frac{1}{3}=-1$， $f'(1)=2-4=-2$

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为： $y-(-1)=-2(x-1)$，

即 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为： $y=-2x+1$.

5. $(x-y+2)^5$ 的展开式中， x^3y 的系数为（　　）

A. 80　　B. 40　　C. -80　　D. -40

【答案】D

【解析】

【分析】利用二项展开式的通项公式求解.

【详解】$(x-y+2)^5=\left[x-\left(y-2\right)\right]^5$ 的展开式中含 x^3 的项为 $C_5^2x^3\left(y-2\right)^2$，

$\left(y-2\right)^2$　展开式中含 y 的项为 $C_2^1y\left(-2\right)$，

所以 $(x-y+2)^5$ 的展开式中， x^3y 的系数为 $C_5^2\cdot C_2^1\cdot\left(-2\right)=-40$，

故选：D

6. 在劳动技术课上某小组同学用游标卡尺测量一个高度为 7 毫米的零件 50 次时，所得数据如下：

测量值	6.8 毫米	6.9 毫米	7.0 毫米	7.1 毫米	7.2 毫米
次数	5	15	10	15	5

根据此数据推测，假如再用游标卡尺测量该零件 2 次，则 2 次测得的平均值为 7.1 毫米的概率为（　　）

A. 0.04　　B. 0.11　　C. 0.13　　D. 0.26

【答案】C

【解析】

【分析】根据表格中的数据可知 2 次测得的平均值为 7.1，有两种情况：一次 7.0，一次 7.2 和两次都是 7.1，

利用古典概型求概率公式计算即可.

【详解】2 次测得的平均值为7.1，有两种情况：

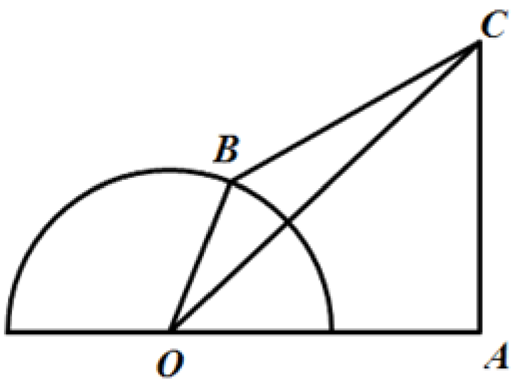
一次7.0，一次7.2，概率$P_1=\frac{1}{5}\times\frac{1}{10}C_2^1=\frac{1}{25}$；

两次都是7.1，概率$P_2=\frac{3}{10}\times\frac{3}{10}=\frac{9}{100}$，

$\therefore P=P_1+P_2=0.04+0.09=0.13$，

故选：C.

7. 克罗狄斯 托勒密（*Ptolemy*）所著的《天文集》中讲述了制作弦表的原理，其中涉及如下定理：任意凸四边形中，两条对角线的乘积小于或等于两组对边乘积之和，当且仅当对角互补时取等号，根据以上材料，完成下题：如图，半圆O的直径为 2，A 为直径延长线上的一点，$OA=2$，B为半圆上一点，以AB为一边作等边三角形ABC，则当线段OC的长取最大值时，$\angle AOC=$（ ）



A. 30 °　　B. 45 °　　C. 60 °　　D. 90 °

【7 题答案】

【答案】C

【解析】

【分析】

根据已知条件先分析出OC的最大值并得到$\angle OBC,\angle OAC$之间的关系，由此借助余弦定理求解出AB的长度，再利用余弦定理即可求解出$\angle AOC$的大小.

【详解】因为$OB\cdot AC+OA\cdot BC\geq OC\cdot AB$，且$\triangle ABC$为等边三角形，$OB=1,OA=2$，

所以$OB+OA\geq OC$，所以$OC\leq 3$，所以OC的最大值为3，取等号时$\angle OBC+\angle OAC=180°$，

所以$\cos\angle OBC+\cos\angle OAC=0$，不妨设$AB=x$，

所以$\frac{x^2+1-9}{2x}+\frac{x^2+4-9}{4x}=0$，所以解得$x=\sqrt{7}$，

所以$\cos\angle AOC=\dfrac{9+4-7}{2\times2\times3}=\dfrac{1}{2}$，所以$\angle AOC=60^\circ$，

故选：C.

【点睛】关键点点睛：解答问题的关键是理解题中所给的定理，由此分析得到角的关系，并借助余弦定理即可求解出结果.

8. 已知$a=e^{0.01}$，$b=\ln1.01e$，$c=2\cos1.1$，则（　　）

A. $b>a>c$　　B. $a>b>c$　　C. $a>c>b$　　D. $c>a>b$

【答案】B

【解析】

【分析】设a,b分别是$y=e^x$，$y=\ln(x+1)+1$在$x=0.01$时所对应的函数值，构造函数利用导数法可证明$\ln(x+1)\le x\le e^x-1$，可得$1<b<a$，又因为$c=2\cos1.1<2\cos60^\circ=1$，即可得出答案.

【详解】因为$b=\ln1.01e=\ln1.01+1$，$a=e^{0.01}$，

所以设a,b分别是$y=e^x$，$y=\ln(x+1)+1$在$x=0.01$时所对应的函数值，

设$g(x)=e^x-x-1$，则$g'(x)=e^x-1$，

所以$x\in(-\infty,0)$时，$g'(x)<0,g(x)$单调递减，

$x\in(0,+\infty)$时，$g'(x)>0,g(x)$单调递增，

所以$g(x)\ge g(0)=0$，即$e^x-1\ge x$，

同理可证$\ln(x+1)\le x$，

所以$\ln(x+1)\le x\le e^x-1$

当$x=0.01$时，可得$\ln1.01<e^{0.01}-1$，即$\ln1.01+1<e^{0.01}$，即$1<b<a$.

又因为$c=2\cos1.1<2\cos60^\circ=1$，所以$c<1<b<a$.

故选：B.

二、多项选择题

9. 下列说法中，正确的命题是（　　）

A. 已知随机变量X服从正态分布N（2，σ^2），P（$X<4$）=0.8，则P（$2<X<4$）=0.2

B. 线性相关系数r越大，两个变量的线性相关性越强，反之，线性相关性越弱

C. 已知两个变量具有线性相关关系，其回归方程　$y=\hat{a}+\hat{b}x$，若$\hat{b}=2,\overline{x}=1$，$\overline{y}=3$，则$\hat{a}=1$

D. 若样本数据$2x_1+1$，$2x_2+1$，……，$2x_{10}+1$的方差为8，则数据x_1,x_2，…，x_{10}的方差为2

【答案】CD

【解析】

【分析】利用正态分布的对称性可以求得$P\left(2<X<4\right)$的值，进而判定 A 错误，根据相关系数的意义可以判定 B 错误，利用回归直线方程过样本中心点，可以求得回归常数的估计值，从而判定 C 正确，利用线性相关的数据组的方差之间的关系可以求得数据x_1，x_2，…，x_{10}的方差，进而判定 D 正确.

【详解】A. 已知随机变量X服从正态分布$N\left(2,\sigma^2\right)$，$P\left(X<4\right)=0.8$，则$P\left(X\geq 4\right)=1-0.8=0.2$，

所以$P\left(X\leq 0\right)=0.2$，

所以$P\left(0<X<4\right)=1-2\times 0.2=0.6$，

$\therefore P\left(2<X<4\right)=\dfrac{0.6}{2}=0.3$，故 A 错误；

B. 线性相关系数r的范围在-1到 1 之间，有正有负，相关有正相关和负相关，相关系数的绝对值的大小越接近于 1，两个变量的线性相关性越强；反之，线性相关性越弱，故 B 错误；

C. 已知两个变量具有线性相关关系，其回归直线方程为$y=a+\hat{b}x$，若$\hat{b}=2$，$\overline{x}=1$，$\overline{y}=3$，则

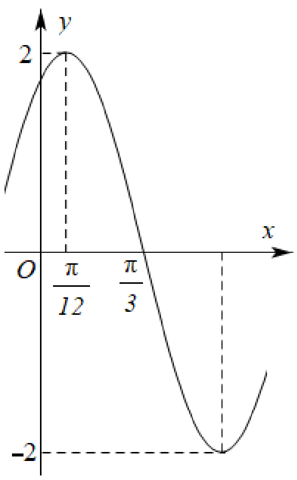
$a=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=1$，故 C 正确；

D. 设数据x_1，x_2，…，x_{10}的方差为S^2，样本数据$2x_1+1$，$2x_2+1$，…，$2x_{10}+1$的方差为$2^2S^2=8$，则$S^2=2$，

即数据x_1，x_2，…，x_{10}的方差为 2，故 D 正确.

故选：CD.

10. 已知函数$f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)(A>0,\omega>0,\left|\phi\right|<\dfrac{\pi}{2})$的部分图像如图所示，下列说法正确的是（　　）



A. 函数 $f(x)$ 的图像关于点 $\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$ 中心对称

B. 函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=-\frac{5\pi}{12}$ 对称

C. 函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递减

D. 函数 $f(x)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位可得函数 $y=2\sin 2x$ 的图像

【答案】AB

【解析】

【分析】根据函数图象求得 $f\left(x\right)$ 解析式，再根据三角函数图象性质及伸缩平移变换分别判断各个选项.

【详解】由图象得函数最小值为-2，故 $A=2$，

$\frac{T}{4}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}$， 故 $T=\pi$， $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，

故函数 $f\left(x\right)=2\sin(2x+\varphi)$，

又函数过点 $\left(\frac{\pi}{12},2\right)$， 故 $2\sin(2\times\frac{\pi}{12}+\varphi)=2$， 解得 $\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in Z$，

又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$， 即 $\varphi=\frac{\pi}{3}$， 故 $f\left(x\right)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，

$f\left(x\right)$ 对称中心： $2x+\frac{\pi}{3}=k\pi,k\in Z$， 解得 $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},k\in Z$， 对称中心为 $(-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},0),k\in Z$， 当 $k=0$ 时，对称中心为 $(-\frac{\pi}{6},0)$，故 A 选项正确；

$f\left(x\right)$ 对称轴： $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$， 解得 $x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},k\in Z$， 当 $k=-1$ 时， $x=-\frac{5\pi}{12}$， 故 B 选项正确；

$f\left(x\right)$ 的单调递减区间： $2x+\frac{\pi}{3}\in[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi],k\in Z$， 解得 $x\in[\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{7\pi}{12}+k\pi],k\in Z$， 又 $\left[-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{6}\right]\not\subset[\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{7\pi}{12}+k\pi],k\in Z$， 故 C 选项不正确；

函数 $f\left(x\right)$ 图像上所有的点向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位，得到函数 $g\left(x\right)=2\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，

故 D 选项不正确；

故选：AB.

11. 已知直线 $y=kx$（$k\neq0$）与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\quad b>0)$ 交于 A，B 两点，以 AB 为直径的圆恰好经过双曲线的右焦点 F，若三角形 ABF 的面积为 $4a^2$，则以下正确的结论有（　　）

A. 双曲线的离心率为 2

B. 双曲线的离心率为 $\sqrt{5}$

C. 双曲线的渐近线方程为 $y=\pm2x$

D. $k=\pm\frac{4}{3}$

【答案】BCD

【解析】

【分析】设出 $AF=m,BF=n$，得到方程组，求出 $m=2a,n=4a$，或 $m=4a,n=2a$，从而得到离心率，及渐近线方程，利用余弦定理及同角三角函数关系得到倾斜角的正切值，从而求出斜率.

【详解】以 AB 为直径的圆过右焦点 F，$\therefore$ 以 AB 为直径的圆：$x^2+y^2=c^2$

设 $AF=m,BF=n$，则 $|m-n|=2a$，$S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}mn=4a^2$，$m^2+n^2=|AB|^2=4c^2$

$$\therefore\begin{cases}|m-n|=2a\\ mn=8a^2\\ m^2+n^2=4c^2\end{cases}$$

解得：$m=2a,n=4a$，或 $m=4a,n=2a$，所以 $c^2=5a^2$，即 $e=\sqrt{5}$, A 错误，B 正确.

$\frac{b}{a}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}-1}=2,\therefore$ 渐近线方程: $y=\pm2x$, C 正确.

D 选项，不妨设 $k>0$，且点 B 在第一象限，则 $BO=OF=c,BF=2a=\frac{2\sqrt{5}}{5}c,$

$$\therefore\cos\angle BOF=\frac{c^2+c^2-\frac{4}{5}c^2}{2\cdot c\cdot c}=\frac{3}{5},$$

$\therefore\sin\angle BOF=\frac{4}{5},\tan\angle BOF=\frac{4}{3}$，此时 $\therefore k=\frac{4}{3}$, 同理可得：当 $k<0$ 时，$k=-\frac{4}{3}$

$\therefore k=\pm\frac{4}{3}$, D 正确,

故选：BCD.

12. 华人数学家李天岩和美国数学家约克给出了“混沌”的数学定义，由此发展的混沌理论在生物学、经济学和社会学领域都有重要作用.在混沌理论中，函数的周期点是一个关键概念，定义如下：设 $f(x)$ 是定义在 **R**

上的函数，对于 $x\in\mathbf{R}$，令 $x_n=f(x_{n-1})(n=1,2,3,\cdots)$，若存在正整数 k 使得 $x_k=x_0$，且当 0<j<k 时，$x_j\neq x_0$，则称 x_0 是 $f(x)$ 的一个周期为 k 的周期点.若 $f(x)=\begin{cases}2x, & x<\dfrac{1}{2}\\ 2(1-x), & x\geqslant\dfrac{1}{2}\end{cases}$，下列各值是 $f(x)$ 周期为 2 的周期点的有（　）

A. 0　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. 1

【12 题答案】

【答案】AC

【解析】

【分析】根据题意中周期点定义，分别求出当 $x_0=0$、$x_0=\dfrac{1}{3}$、$x_0=\dfrac{2}{3}$、$x_0=1$ 时的函数周期，进而得出结果.

【详解】A：$x_0=0$ 时，$x_1=f\left(0\right)=0$，周期为 1，周期为 2 也正确，故 A 正确；

B：$x_0=\dfrac{1}{3}$ 时，$x_1=f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{2}{3}$，$x_2=f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{2}{3}$，$x_3=\cdots=x_n=\dfrac{2}{3}$，

所以 $\dfrac{1}{3}$ 不是 $f\left(x\right)$ 的周期点.故 B 错误；

C：$x_0=\dfrac{2}{3}$ 时，$x_1=x_2=\cdots=x_n=\dfrac{2}{3}$，周期为 1，周期为 2 也正确.故 C 正确；

D：$x_0=1$ 时，$x_1=f\left(1\right)=0$，$x_2=f\left(0\right)=0\neq x_0$，

$\therefore 1$ 不是 $f\left(x\right)$ 周期为 2 的周期点，故 D 错误.

故选：AC.

三、填空题

13. 抛物线 $C:x^2=4ay$ 的焦点坐标为 $\left(0,2\right)$，则 C 的准线方程为______.

【13 题答案】

【答案】$y=-2$

【解析】

【分析】由抛物线的标准方程及焦点坐标直接写出准线方程.

【详解】因为抛物线 $C:x^2=4ay$ 的焦点坐标为 $\left(0,2\right)$，

所以 C 的准线方程为 $y=-2$.

故答案为：$y=-2$

14. 已知实数 x 满足 $log_{0.5}x>1$，则函数 $y=8x+\frac{1}{2x-1}$的最大值为__0__

15. 设函数 $y=\cos 2x(x\geq 0)$ 和函数 $y=\cos 10x(x\geq 0)$ 的图象的公共点的横坐标从小到大依次为 x_1，x_2，…，x_n，若 $\tan(x_3-\alpha)=\cos x_4$，则 $\sin 2\alpha=$________.

【15 题答案】

【答案】$\frac{3}{5}$

【解析】

【分析】利用余弦方程，解出 x 的值，然后得到 $x_3=\frac{\pi}{4}$，$x_4=\frac{\pi}{3}$，代入 $\tan(x_3-\alpha)=\cos x_4$，利用正切的两角差公式求出 $\tan\alpha$ 的值，然后再利用二倍角公式以及“1”的代换，结合“弦化切”的方法，求解即可.

【详解】因为 $\cos 2x=\cos 10x(x\geq 0)$，

则有 $10x=2x+2k\pi$ 或 $10x+2x=2n\pi$，k，$n\in\mathbf{N}$，

解得 $x=\frac{1}{4}k\pi$ 或 $x=\frac{n\pi}{6}$，k，$n\in\mathbf{N}$，

又函数 $y=\cos 2x(x\geq 0)$ 和函数 $y=\cos 10x(x\geq 0)$ 的图象的公共点的横坐标从小到大依次为 x_1，x_2，…，x_n，

所以 $x=0$，$\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{2}$，$\frac{2\pi}{3}$，…，

故 $x_3=\frac{\pi}{4}$，$x_4=\frac{\pi}{3}$，

所以 $\tan(x_3-\alpha)=\cos x_4$，即 $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{3}$，

则 $\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{1}{2}$，解得 $\tan\alpha=\frac{1}{3}$，

故 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{3}{5}$.

故答案为：$\frac{3}{5}$.

16. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右顶点为 A， 以 A 为圆心，b 为半径的圆与双曲线的一条渐近线交于 M,N 两点，若 $\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{ON}$（其中 O 为坐标原点），则双曲线的离心率为____$\frac{2\sqrt{3}}{3}$____.

【答案】$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】取 MN 中点 B，连接 AB，得 $|OB|=3|MB|$，利用点到直线距离求出 $|AB|=\dfrac{ab}{c}$，根据 $|OA|^2-|AB|^2=9\left(|AM|^2-|AB|^2\right)$ 建立关系即可求出.

【详解】如图，取 MN 中点 B，连接 AB，则 $|OB|=3|MB|$，且 $AB\perp MN$，

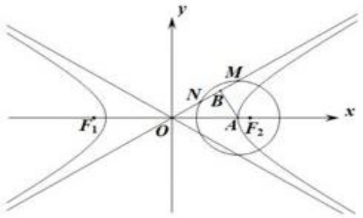
则点 $A(a,0)$ 到渐近线 $y=\dfrac{b}{a}x$ 的距离为 $|AB|=\dfrac{|ab|}{\sqrt{b^2+a^2}}=\dfrac{ab}{c}$，

$\because |OA|^2-|AB|^2=|OB|^2=9|MB|^2=9\left(|AM|^2-|AB|^2\right)$，

$\therefore a^2-\dfrac{a^2b^2}{c^2}=9\left(b^2-\dfrac{a^2b^2}{c^2}\right)$，结合 $b^2=c^2-a^2$ 可得 $9c^4-18a^2c^2+8a^4=0$，

则可解得 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

故答案为：$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.



17、**解**：（1）在 ΔABC 中，因为 $a\cos\dfrac{B}{2}=b\sin A$，所以由正弦定理得 $\sin A\cdot\cos\dfrac{B}{2}=\sin B\cdot\sin A$，

因为 $\sin A\neq 0$，所以 $\cos\dfrac{B}{2}=\sin B$，……………2 分

所以 $\cos\dfrac{B}{2}=2\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}$

因为 $\cos\dfrac{B}{2}\neq 0$，所以 $\sin\dfrac{B}{2}=\dfrac{1}{2}$，……………4 分

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$ ……………5 分

（2）选①:由正弦定理得 $\dfrac{\frac{5\sqrt{3}}{3}}{\sin A}=\dfrac{5}{\sin\frac{\pi}{3}}$，即 $\sin A=\dfrac{1}{2}$，因为 $b>a$，所以 $A=\dfrac{\pi}{6}$，

所以 $C=\dfrac{\pi}{2}$，所以 ΔABC 是直角三角形，所以 $S=\dfrac{1}{2}ab=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\cdot 5=\dfrac{25\sqrt{3}}{6}$. …………10 分

选②: 由 $\tan(A+\frac{\pi}{4})=2+\sqrt{3}$ 得 $\frac{\tan A+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan A\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\tan A+1}{1-\tan A}=2+\sqrt{3}$，解得 $\tan A=\frac{\sqrt{3}}{3}$

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{6}$，

所以 $C=\frac{\pi}{2}$，所以 ΔABC 是直角三角形，所以 $S=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{3}\cdot 5=\frac{25\sqrt{3}}{6}$. …………10 分

选③：因为 $b^2+c^2=a^2+bc$，所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$，

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$，又 $B=\frac{\pi}{3}$，所以 ΔABC 为正三角形，所以 $S=\frac{25\sqrt{3}}{4}$ …………10 分

18、解：（1）因为 $S_n=1-2a_{n+1}$，所以 $S_{n-1}=1-2a_n$，$(n\geq 2)$

两式相减得 $2a_{n+1}=a_n$，$(n\geq 2)$ ……………2 分

因为 $a_1=\frac{1}{2}$，$S_n=1-2a_{n+1}$，所以令 $n=1$，则可得 $a_2=\frac{1}{2}(1-a_1)=\frac{1}{4}$ 所以 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{2}$

又 $a_1=\frac{1}{2}\neq 0$，$a_2=\frac{1}{4}\neq 0$，$2a_{n+1}=a_n$，所以 $a_n\neq 0$（$n\in N^*$）

所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$，（$n\in N^*$），……………5 分

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 $\frac{1}{2}$、公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列，

所以 $a_n=(\frac{1}{2})^n$ ……………6 分

注：结果 $a_n=(\frac{1}{2})^n$ 对，但没有说明 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{2}$ 的扣 2 分

（2）因为 $a_n=(\frac{1}{2})^n$，所以 $b_n=\log_{\frac{1}{2}}a_n=n$ ………… 7 分

所以 $c_n=\frac{1}{4{b_n}^2-1}=\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$ ……………9 分

所以 $T_n=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n=\frac{1}{2}\left[(\frac{1}{1}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})\right]$

$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{n}{2n+1}$ ……………12 分

19、（1）证明：$\because$ 四边形 $ABCD$ 为长方形，$\therefore AB\perp AD$，

$\because$ 平面$PAD\perp$平面$ABCD$，平面$PAD\cap$平面$ABCD=AD$，$AB\subset$平面$ABCD$

$\therefore AB\perp$ 平面 PAD ……………3 分

$\because PA\subset$平面PAD $\therefore AB\perp PA$.

同理 $AD\perp PA$，

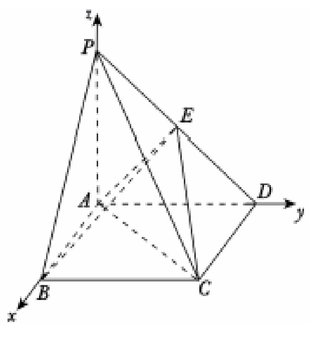
又 $AB\cap AD=A$，$AB\subset$平面$ABCD$, $AD\subset$平面$ABCD$

$\therefore PA\perp$平面 $ABCD$. ……………5 分

（2）以 A 为坐标原点，AB, AD, AP 所在直线分别为 x,y,z 轴，建立如图所示空间直角坐标系 …6 分

则 $A(0,0,0), B(3,0,0), D(0,2,0), C(3,2,0), E(0,1,1), P(0,0,2)$,

设 $\vec{m}=(x,y,z)$ 为平面 ABE 的法向量，



$\because \begin{cases} \overrightarrow{m}\bullet\overrightarrow{AB}=0 \\ \overrightarrow{m}\bullet\overrightarrow{AE}=0 \end{cases} \therefore \begin{cases} y+z=0 \\ x=0 \end{cases}$，令 $y=1$，则 $z=-1$，

$\therefore$平面 ABE 的一个法向量 $\vec{m}=(0,1,-1)$. ……………8 分

同理可求得平面 BCE 的一个法向量 $\vec{n}=(1,0,3)$， ……………10 分

$\therefore \cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=-\dfrac{3\sqrt{20}}{20}$.

$\because$二面角 $A-BE-C$ 的大小为钝角

$\therefore$二面角 $A-BE-C$ 的余弦值为$-\dfrac{3\sqrt{20}}{20}$. ……………12 分

注：错将二面角的余弦值写成$\dfrac{3\sqrt{20}}{20}$的扣 1 分

20、解：（1）随机变量 X 的可能取值为$0,1,2$，

$P(X=0)=\dfrac{C_3^0C_2^2}{C_5^2}=\dfrac{1}{10},P(X=1)=\dfrac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\dfrac{3}{5},P(X=2)=\dfrac{C_3^2C_2^0}{C_5^2}=\dfrac{3}{10}$， ……………3 分

X	0	1	2
P	$\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{3}{10}$

所以$E(X)=0\times\dfrac{1}{10}+1\times\dfrac{3}{5}+2\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{6}{5}$ ……………5 分

（2）$\mu=\bar{t}=\dfrac{35\times300+45\times600+55\times900+65\times450+75\times450+85\times300}{3000}=58.5$ ………7 分

又$43.9=58.5-14.6=\mu-\sigma,87.7=58.5+14.6\times2=\mu+2\sigma$，

所以$P(43.9<t\le87.7)=P(\mu-\sigma<t\le\mu+2\sigma)=\dfrac{0.6827+0.9545}{2}=0.8186$ ……………9 分

所以$P(t\le\mu-\sigma$或$t>\mu+2\sigma)=1-0.8186=0.1814$，

所以$Y\sim B(10,0.1814)$，

所以$P(Y=2)=C_{10}^2\times0.1814^2\times0.8186^8$ ……………11 分

$\approx45\times0.033\times0.202\approx0.300$ ……………12 分

21、解：（1）由题意得$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}\\ a^2=b^2+c^2\\ 2ab=4\sqrt{3}\end{cases}$， ……………….2 分

解得 $a=2$，$b=\sqrt{3}$，所以椭圆C 的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ……………….4 分

（2）方法 1：若直线l 的斜率不存在，则直线l 方程为$x=1$，

此时可得$P(1,\dfrac{3}{2})$，$Q(1,-\dfrac{3}{2})$，$M(4,-3)$，$N(4,3)$，所以$\overrightarrow{BM}\bullet\overrightarrow{BN}=-5$. ……………….5 分

若直线l 的斜率存在，设直线l 的方程为$y=k(x-1)(k\ne0)$，代入$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$整理得

$(3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$，易得$\Delta\ge0$恒成立.

设$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2),(x_1,x_2\ne2)$， 则$x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{3+4k^2},x_1x_2=\dfrac{4k^2-12}{3+4k^2}$， ………………7 分

由直线 PB 的方程 $y=\frac{y_1}{x_1-2}(x-2)$ 可得点 $M(4,\frac{2y_1}{x_1-2})$，

由直线 QB 的方程 $y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$ 可得点 $N(4,\frac{2y_2}{x_2-2})$，

所以 $\overrightarrow{BM}=(2,\frac{2y_1}{x_1-2}),\overrightarrow{BN}=(2,\frac{2y_2}{x_2-2})$ ……………….8 分

所以 $\overrightarrow{BM}\bullet\overrightarrow{BN}=4+\frac{2y_1}{x_1-2}\cdot\frac{2y_2}{x_2-2}=4+4k^2\frac{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}$ ……………….9 分

$=4+4k^2\frac{4k^2-12-8k^2+4k^2+3}{4k^2-12-2\times8k^2+4(4k^2+3)}=4+4k^2\times\frac{-9}{4k^2}=-5$

综上，$\overrightarrow{BM}\bullet\overrightarrow{BN}$ 为定值. ……………….12 分

方法 2：显然直线 l 的斜率不为 0，设直线 l 的方程为 $x=my+1$，代入 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 整理得

$(3m^2+4)y^2+6my-9=0$，易得 $\Delta\geq0$ 恒成立.

设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2),(x_1,x_2\neq2)$，则 $y_1+y_2=\frac{-6m}{3m^2+4},y_1y_2=\frac{-9}{3m^2+4}$， ……………….7 分

由直线 PB 的方程 $y=\frac{y_1}{x_1-2}(x-2)$ 可得点 $M(4,\frac{2y_1}{x_1-2})$，

由直线 QB 的方程 $y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$ 可得点 $N(4,\frac{2y_2}{x_2-2})$，

所以 $\overrightarrow{BM}=(2,\frac{2y_1}{x_1-2}),\overrightarrow{BN}=(2,\frac{2y_2}{x_2-2})$ ……………….8 分

所以 $\overrightarrow{BM}\bullet\overrightarrow{BN}=4+\frac{2y_1}{x_1-2}\cdot\frac{2y_2}{x_2-2}=4+\frac{4y_1y_2}{m^2y_1y_2-m(y_1+y_2)+1}$ ……………….9 分

$=4+\frac{-36}{-9m^2+6m^2+3m^2+4}=4-9=-5$ ……………….12 分

22、解：（1）若 $a=1$，则 $f(x)=e^x-\ln x,(x>0)$，$f'(x)=e^x-\frac{1}{x}$

设切点 $P(x_0,e^{x_0}-\ln x_0)$，则 $\frac{e^{x_0}-\ln x_0-1}{x_0}=e^{x_0}-\frac{1}{x_0}$，即 $(x_0-1)e^{x_0}+\ln x_0=0$ ……………….2 分

令 $\varphi(x)=(x-1)e^x+\ln x,(x>0)$，观察得 $\varphi(1)=0$， ……………….4 分

又 $\varphi'(x)=xe^x+\frac{1}{x}>0$，所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，

所以方程 $(x_0-1)e^{x_0}+\ln x_0=0$ 的根仅有 $x_0=1$，所以 $k=e-1$ ……………….5 分

注：观察出 $x_0=1$ 是 $(x_0-1)e^{x_0}+\ln x_0=0$ 的根但没有交待唯一性的扣 1 分

（2）**方法 1：（直接研究差函数的最小值）**

令 $g(x)=e^x-a\ln x-a\ln a,(x>0)$，则 $g'(x)=e^x-\frac{a}{x}=\frac{xe^x-a}{x}$，

令 $\varphi(x)=xe^x-a,(x\geq0)$，则 $\varphi(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上递增，且 $\varphi(0)=-a<0$，$\varphi(a)=a(e^a-1)>0$，

所以存在唯一 $x_0\in(0,a)$，使得 $\varphi(x_0)=x_0e^{x_0}-a=0$，所以

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)<0$，故函数 $g(x)$ 单调递减.

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时 $g'(x)>0$，故函数 $g(x)$ 单调递增.

所以 $g(x)_{\min}=g(x_0)=e^{x_0}-a\ln x_0-a\ln a$ ……………….7 分

$=a(\frac{1}{x_0}-2\ln x_0-x_0)$ ……………….9 分

由 $g(x)>0$ 恒成立得 $a(\frac{1}{x_0}-2\ln x_0-x_0)>0$，即 $\frac{1}{x_0}-2\ln x_0-x_0>0$，

令 $h(x)=\frac{1}{x}-2\ln x-x,(x>0)$，则 $h'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}-1<0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递减.

由 $h(1)=0$ 得 $h(x)>0$ 的解为 $0<x<1$，所以 $0<x_0<1$， ……………….11 分

令 $\phi(x)=xe^x$，$x\in(0,1)$，则 $\phi(x)$ 在 $(0,1)$ 上递增，

所以 $a=x_0e^{x_0}\in(0,e)$，所以 $0<a<e$. ……………….12 分

方法 2：（构建同构式处理不等式） 由 $f(x)>a\ln a$ 得 $\frac{e^x}{a}-\ln a>\ln x$，即 $e^{x-lna}-\ln a>\ln x$，

两边同时加 x 得 $e^{x-lna}+x-\ln a>e^{\ln x}+\ln x$

令 $g(t)=e^t+t$,则 $g(x-\ln a)>g(\ln x)$, ……………….9 分

$\because$ $g(t)$ 为单调增函数 $\therefore$ $x-\ln a>\ln x$，即 $\ln a<x-\ln x$，

令 $h(x)=x-\ln x$,则 $h'(x)=\frac{x-1}{x}$

$\therefore$ $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore$ $h(x)_{\min}=h(1)=0$，

$\therefore$ $\ln a<1$，解得 $0<a<e$. ……………….12 分