江苏省仪征中学 2022-2023 学年度第一学期高三数学综合训练（8）

一、单项选择题. 本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若 $z=-1+\mathrm{i}$．设 $\omega=z\overline{z}$，则 $\omega=$（　　）

A. 2i　　B. 2　　C. $2+2\mathrm{i}$　　D. $2-2\mathrm{i}$

2. 已知 $g(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{x-2}, x<4,\\ \log_5(x-1), x\geq 4,\end{cases}$ 则 $f(f(26))$ 等于（　　）

A. $\dfrac{1}{5}$　　B. $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$　　C. 1　　D. 2

3. "$a=1$" 是 "直线 $l_1:(a-2)x+y+1=0$ 与直线 $l_2:(a+1)x+2y-2=0$ 互相垂直"的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 若△ABC 的面积是$\frac{1}{2}$，$AB=1$，$BC=\sqrt{2}$，则 AC 等于(　　)

A. 5　　B. $\sqrt{5}$或 1　　C. 5 或 1　　D. $\sqrt{5}$

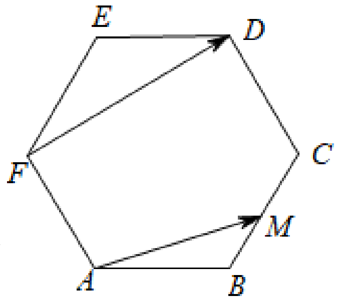
5. 在下列命题中，假命题是（　　）

A. 若平面 α 内的一条直线垂直于平面 β 内的任一直线，则 $\alpha\perp\beta$

B. 若平面 α 内任一直线平行于平面 β，则 $\alpha /\!/ \beta$

C. 若平面 $\alpha\perp$ 平面 β，任取直线 $l\subset\alpha$，则必有 $l\perp\beta$

D. 若平面 $\alpha /\!/$ 平面 β，任取直线 $l\subset\alpha$，则必有 $l /\!/ \beta$

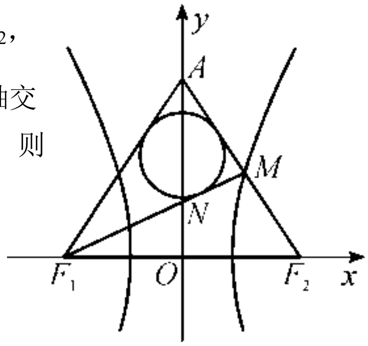


6. 如图，正六边形 $ABCDEF$ 边长为 2，动点 M 从顶点 B 出发，沿正六边形的边逆时针运动到顶点 F，若 $\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{AM}$ 的最大值和最小值分别是 m，n，则 $m+n=$（　　）

A. 9　　B. 10

C. 11　　D. 12

7.如图，已知双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{a+2}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，M 是 C 上位于第一象限内的一点，且直线 F_2M 与 y 轴的正半轴交于点 A，△AMF_1 的内切圆在边 MF_1 上的切点为 N，若 $MN=2$，则双曲线 C 的离心率为(　　)



A. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $\sqrt{5}$

C. 2　　D. $\sqrt{2}$

8. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $2a_n-S_n=2$，记数列$\left\{\dfrac{a_n}{(a_n+1)(a_{n+1}+1)}\right\}$的前 n 项和为 T_n，若对于任意 $n\in\mathrm{N}^*$，不等式 $k>T_n$ 恒成立，则实数 k 的取值范围为（　　）

A. $[\frac{1}{3},+\infty)$　　B. $(\frac{1}{3},+\infty)$　　C. $[\frac{1}{2},+\infty)$　　D. $(\frac{1}{2},+\infty)$

二、多项选择题. 本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 现安排甲、乙、丙、丁、戊 5 名同学参加 2022 年杭州亚运会志愿者服务活动，有翻译、导游、礼仪、

司机四项工作可以安排，则以下说法错误的是（　　）

A. 若每人都安排一项工作，则不同的方法数为5^4

B. 若每项工作至少有 1 人参加，则不同的方法数为$A_5^4C_4^1$

C. 每项工作至少有 1 人参加，甲、乙不会开车但能从事其他三项工作，丙、丁、戊都能胜任四项工作，则不同安排方案的种数是$C_3^1C_4^2A_3^3+C_3^2A_3^3$

D. 如果司机工作不安排，其余三项工作每项工作至少安排 1 人，则这 5 名同学全部被安排的不同方法数为$\left(C_5^3C_2^1+C_5^2C_3^2\right)A_3^3$

10. 已知函数 $f\left(x\right)=\sin\omega x+\sqrt{3}\cos\omega x(\omega>0)$ 相邻的最高点的距离为π，则下列结论正确的是（　　）

A. 函数$y=f\left(x\right)$的图象关于点$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$中心对称

B. 函数 $f\left(x\right)$在区间$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$上的值域为$[1,2]$

C. 将函数$y=f\left(x\right)$的图象上所有点的横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$，然后向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位得$y=-2\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象

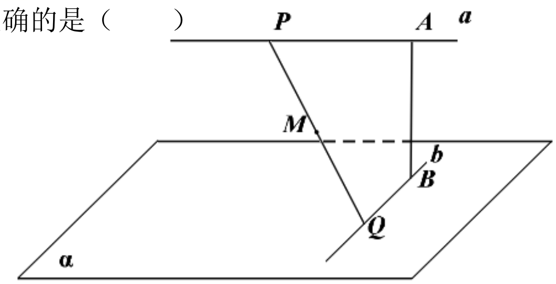
D. 若 $f\left(\theta\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}$，则 $f\left(2\theta+\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{16}{9}$

11. 已知圆$M:x^2+\left(y-2\right)^2=1$，点 P 为 x 轴上一个动点，过点 P 作圆 M 的两条切线，切点分别为 A，B，直线 AB 与 MP 交于点 C，则下列结论正确的是（　　）

A. 四边形 $PAMB$ 周长的最小值为$2+2\sqrt{3}$　　B. $\left|AB\right|$的最大值为 2

C. 直线 AB 过定点　　D. 存在点 N 使$\left|CN\right|$为定值

12. 如图，已知 a，b 是相互垂直的两条异面直线，直线 AB 与 a，b 均相互垂直，垂足分别为 A，B，且 $AB=2\sqrt{3}$，动点 P，Q 分别位于直线 a，b 上，且 P 异于 A，Q 异于 B.若直线 PQ 与 AB 所成的角$\theta=\frac{\pi}{6}$，线段 PQ 的中点为 M，下列说法正确的是（　　）



A. PQ 的长度为定值

B. 三棱锥 $A-BPQ$ 的外接球的半径长为定值

C. 三棱锥 $A-BPQ$ 的体积为定值

D. 点 M 到 AB 的距离为定值

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^x\cdot\cos x+1$ 在 $x=0$ 的切线方程为__________.

14. $\left(x+2y-z\right)^5$ 展开式中 x^2yz^2 的系数为___________.

15. 函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}x^2-ax$ 是 R 上的单调递增函数，则 a 的取值范围是______.

16. 希腊著名数学家阿波罗尼斯与欧几里得、阿基米德齐名他发现：“平面内到两个定点 A,B 的距

离之比为定值$\lambda\left(\lambda\neq1\right)$的点的轨迹是圆".后来，人们将这个圆以他的名字命名，称为阿波罗尼斯圆，简称阿氏圆.已知在平面直角坐标系xOy中，$A\left(-2,1\right)$，$B\left(-2,4\right)$，点P是满足$\lambda=\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{1}{2}$的阿氏圆上的任一点，则该阿氏圆的方程为__________________；若点Q为抛物线E：$y^2=4x$上的动点，Q在y轴上的射影为H，则$\dfrac{1}{2}\left|PB\right|+\left|PQ\right|+\left|QH\right|$的最小值为______.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)若数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且满足 $a_n+2S_nS_{n-1}=0(n\geq2)$，$a_1=\dfrac{1}{2}$.

(1)求证：$\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$成等差数列；

(2)求数列$\{a_n\}$的通项公式.

18. (12 分)已知△ABC 的三个内角分别为 A，B，C，向量$\vec{m}=(\sin B,1-\cos B)$与向量$\vec{n}=(2,0)$夹角的余弦值为$\dfrac{1}{2}$.

(1)求角 B 的大小；

(2)求$\sin A+\sin C$的取值范围.

19. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过点 $P(2，1)$，且离心率 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

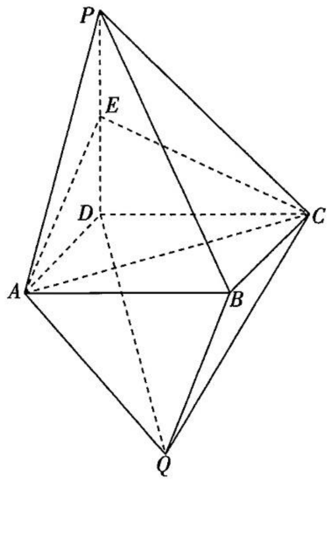
(1)求椭圆 C 的方程；

(2)若直线 l 的斜率为$\dfrac{1}{2}$，直线 l 与椭圆 C 交于 A，B 两点，求△PAB 的面积的最大值.

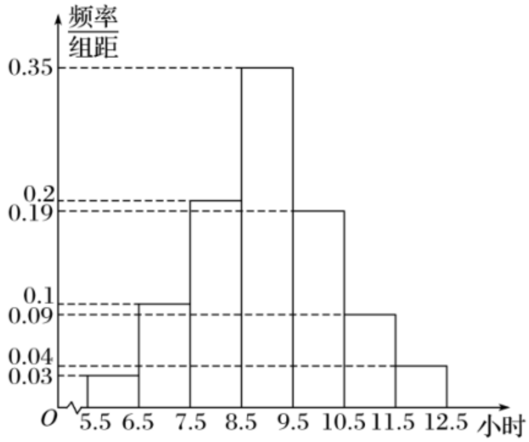
20. (12 分)如图，在几何体 $PABCDQ$ 中，四边形 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形，$PD\perp$平面 $ABCD$，$PD=4$，点 E 为 PD 的中点，四棱锥$Q-ABCD$是高为 4 的正四棱锥.

(1)求证：$QB\perp$平面 EAC；

(2)求平面 PAC 与平面 QAB 所成锐二面角的余弦值.



21. (12 分)为保障全民阅读权利，培养全民阅读习惯，提高全民阅读能力，推动文明城市和文化强市建设，某高校为了解全校学生的阅读情况，随机调查了 200 名学生的每周阅读时间 x(单位：小时)并绘制如图所示的频率分布直方图：



（1）求这 200 名学生每周阅读时间的样本平均数 $\overline{x}$ 和样本方差 s^2(同一组的数据用该组区间中点值代表)；

（2）由直方图可以看出，目前该校学生每周的阅读时间 x 大致服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$，其中 μ 近似为样本平均数 $\overline{x}$，σ^2 近似为样本方差 s^2.

①一般正态分布 $N(\mu,\sigma)$ 的概率都可以转化为标准正态分布 $N\left(0,1\right)$ 的概率进行计算：

若 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，令 $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$，则 $Y\sim N\left(0,1\right)$，且 $P\left(X\le a\right)=P\left(Y\le\dfrac{a-\mu}{\sigma}\right)$利用直方图得到的正态分布，求 $P\left(X\le 10\right)$；

②从该高校的学生中随机抽取 20 名，记 Z 表示这 20 名学生中每周阅读时间超过 10 小时的人数，求$P(Z\ge 2)$（结果精确到 0.0001），以及 Z 的数学期望.

参考数据：$\sqrt{178}\approx\dfrac{40}{3}$，$0.7734^{19}\approx 0.0076$. 若 $Y\sim N\left(0,1\right)$，则 $P\left(Y\le 0.75\right)=0.7734$.

22. (12 分) 设函数$f(x)=a(x+1)^2-2\sin x$.

(1)若曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为$kx-y+2=0$,求k的值;

(2)若$f(x)\ge 1$,求实数a的取值范围;

(3)求证:$a>\frac{1}{2}$时,函数$f(x)$不存在零点.

江苏省仪征中学2022-2023学年度第一学期高三数学综合训练（8）答案

一、单项选择题： 1.B　2.C　3.A　4.B　5.C　6.D　7.D　8.A

二、多项选择题： 9. ABD　10.ACD　11.ACD　12.ABD

三、填空题：

13. $x-y+2=0$　14.60　15. $a\le 1$　16. ①. $(x+2)^2+y^2=4$；②. $\sqrt{10}-1$

四、解答题：

17.（10分）(1)证明：当 $n\geqslant 2$ 时，由 $a_n+2S_nS_{n-1}=0$，

得 $S_n-S_{n-1}=-2S_nS_{n-1}$，因为 $S_n\neq 0$，所以$\dfrac{1}{S_n}-\dfrac{1}{S_{n-1}}=2$，又$\dfrac{1}{S_1}=\dfrac{1}{a_1}=2$，

故$\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$是首项为2，公差为2的等差数列．……………………………………5分

(2)由(1)可得$\dfrac{1}{S_n}=2n$，所以 $S_n=\dfrac{1}{2n}$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{2(n-1)}=\dfrac{n-1-n}{2n(n-1)}=-\dfrac{1}{2n(n-1)}$.………………………………8分

当 $n=1$ 时，$a_1=\dfrac{1}{2}$不适合上式．…………………………9分

故 $a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & n=1,\\ \dfrac{-1}{2n(n-1)}, & n\geqslant 2.\end{cases}$　…………………………10分

18．解:（1） $\because \vec{m}=(\sin B,1-\cos B),\vec{n}=(2,0),\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{1}{2}$，即$\frac{2\sin B}{2\sqrt{2-2\cos B}}=\frac{1}{2}$.

$\therefore 2\cos^2 B-\cos B-1=0$．解得 $\cos B=-\frac{1}{2}$ 或 $\cos B=1$（舍），

$\because 0<B<\pi$， $\therefore B=\frac{2\pi}{3}$. ……………………………………6分

(2) 由（1）知 $A+C=\frac{\pi}{3}$，

$\therefore \sin A+\sin C=\sin A+\sin\left(\frac{\pi}{3}-A\right)=\frac{1}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A=\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)$. …………10分

$\because 0<A<\frac{\pi}{3},\therefore\frac{\pi}{3}<A+\frac{\pi}{3}<\frac{2\pi}{3}.\therefore\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$. 即 $\sin A+\sin C\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$. ……12分

19．解: (1)因为 $e^2=\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{a^2-b^2}{a^2}=\dfrac{3}{4}$，所以 $a^2=4b^2$.

又椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过点 $P(2，1)$，所以$\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1$.所以 $a^2=8$，$b^2=2$.

故所求椭圆方程为$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$. ……………………………………4分

(2)设 l 的方程为 $y=\dfrac{1}{2}x+m$，点 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，联立$\begin{cases}y=\dfrac{1}{2}x+m,\\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1\end{cases}$ 消去 y 整理，

得 $x^2+2mx+2m^2-4=0$.

所以 $x_1+x_2=-2m$，$x_1x_2=2m^2-4$. ……………………………………7 分

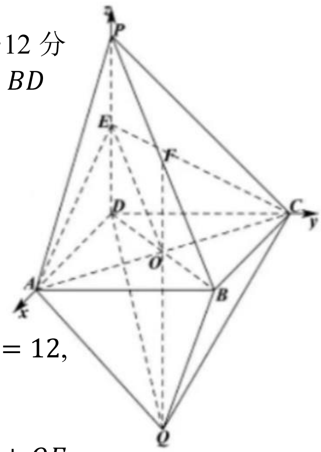
又直线 l 与椭圆相交，所以 $\Delta=4m^2-8m^2+16>0$，解得$|m|<2$.

则 $AB=\sqrt{1+\frac{1}{4}}\times\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{5(4-m^2)}$.

点 P 到直线 l 的距离 $d=\frac{|m|}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}}=\frac{2|m|}{\sqrt{5}}$.……………………………………9 分

所以 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}dAB=\frac{1}{2}\times\frac{2|m|}{\sqrt{5}}\times\sqrt{5(4-m^2)}=\sqrt{m^2(4-m^2)}\le\frac{m^2+4-m^2}{2}=2$. ……………11 分

当且仅当 $m^2=2$，即 $m=\pm\sqrt{2}$时，△PAB 的面积取得最大值为 2. ……12 分



20. (1)证明:连接BD,与AC交于点O,因为四边形$ABCD$是正方形,所以$AC\perp BD$

连接OQ,因为四棱锥$Q-ABCD$是正四棱锥,所以$OQ\perp$平面$ABCD$,

$\because AC\subset$平面$ABCD$,则$OQ\perp AC$,

因为$OQ\cap BD=O$,所以$AC\perp$平面QBD,

因为$BQ\subset$平面QBD,所以$AC\perp BQ$,

$\because PD\perp$平面$ABCD$,则$PD//QO$，延长QO与PB交于点F,

$\because O$为BD的中点,则F为PB的中点,则$OF=\frac{1}{2}PD=2$,

又$OQ=4, OB=2\sqrt{2}$,所以$QF=6, BF^2=OF^2+OB^2=2^2+(2\sqrt{2})^2=12$,

$QB^2=OQ^2+OB^2=4^2+(2\sqrt{2})^2=24$,

所以$BF^2+QB^2=QF^2$,所以$QB\perp BF$

连接OE,因为点E为PD的中点,点O为BD的中点,所以$OE//BF$,所以$QB\perp OE$,

因为$OE\cap AC=O$,所以$QB\perp$平面EAC.

(2)解:以D为原点，直线DA、DC、DP分别为x轴、y轴、z轴建立如图所示的空间直角坐标系,

则$A(4,0,0), C(0,4,0), P(0,0,4), B(4,4,0), Q(2,2,-4)$,

所以$\overrightarrow{AC}=(-4,4,0), \overrightarrow{AP}=(-4,0,4), \overrightarrow{AB}=(0,4,0), \overrightarrow{AQ}=(-2,2,-4)$.

设平面PAC的法向量为$\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$,则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0\end{cases}$,得$\begin{cases}-4x_1+4y_1=0\\ -4x_1+4z_1=0\end{cases}$,

取$z_1=1$,得$\vec{n}=(1,1,1)$.

设平面QAB的法向量为$\vec{m}=(x_2,y_2,z_2)$,则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AQ}=0\end{cases}$得$\begin{cases}4y_2=0\\ -2x_2+2y_2-4z_2=0\end{cases}$,

取$z_2=1$,得$\vec{m}=(-2,0,1)$.

设平面PAC与平面QAB所成锐二面角的大小为θ,

则$\cos\theta=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{m}|}{|\vec{n}||\vec{m}|}=\frac{|1\times(-2)+1\times0+1\times1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\times\sqrt{(-2)^2+0^2+1^2}}=\frac{\sqrt{15}}{15}$,

所以平面PAC与平面QAB所成锐二面角的余弦值为$\frac{\sqrt{15}}{15}$.

21. 解：(1)$\bar{x}=6\times0.03+7\times0.1+8\times0.2+9\times0.35+10\times0.19+11\times0.09+12\times0.04=9$,

$$s^2=(6-9)^2\times0.03+(7-9)^2\times0.1+(8-9)^2\times0.2+(9-9)^2\times0.35+(10-9)^2\times0.19+(11-9)^2\times0.09+(12-9)^2\times0.04=1.78$$

(2)①由题知 $\mu=9, \sigma^2=1.78, \therefore X\sim N(9,1.78)$, $\sigma=\sqrt{1.78}=\frac{\sqrt{178}}{10}\approx\frac{4}{3}$,

$P(X\le10)=P\left(Y\le\frac{10-9}{\frac{4}{3}}\right)=P(Y\le0.75)=0.7734$.

②由(1)知 $P(X>10)=1-P(X\le10)=0.2266$,可得 $Z\sim B(20,0.2266)$,

$P(Z\ge2)=1-P(Z=0)-P(Z=1)=1-0.7734^{20}-C_{20}^{1}0.2266\times0.7734^{19}$

$=1-(0.7734+20\times0.2266)\times0.0076\approx0.9597$

故 Z 的数学期望 $EZ=20\times0.2266=4.532$.

22. 解: (1)因为$f'(x)=2a(x+1)-2\cos x$,所以$f'(0)=2a-2$,由题意得$\begin{cases}2a-2=k,\\ f(0)=a=2,\end{cases}$

解得$k=2$.

(2)因为$f(x)\geq 1$成立,所以$f(0)=a\geq 1$,

当$a\geq 1$时,$a(x+1)^2-2\sin x\geq (x+1)^2-2\sin x$,

设$g(x)=(x+1)^2-2\sin x$,则$g'(x)=2(x+1)-2\cos x$,$g''(x)=2+2\sin x\geq 0$,

所以函数$g'(x)$在R上单调递增,而$g'(0)=0$,

所以当$x\in(-\infty,0)$时,函数$g'(x)<0$,在$x\in(0,+\infty)$忖,$g'(x)>0$,

所以函数$g(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减,在$(0,+\infty)$单调递增,

所以$g(x)_{\min}=g(0)=1$,即$(x+1)^2-2\sin x\geq 1$成立,

所以$f(x)\geq 1$,实数a的取值范围为$[1,+\infty)$.

(3)因为$a>\frac{1}{2}$,所以$a(x+1)^2\geq\frac{1}{2}(x+1)^2=\frac{1}{2}(x-1)^2+2x\geq 2x$,且两个等号不同时成立,

即$a(x+1)^2>2x$;

令$h(x)=2x-2\sin x$,则$h'(x)=2-2\cos x\geq 0$,

所以函数$h(x)$在 R 上单调递增,而$h(0)=0$,

当$x\geq 0$时,$h(x)=2x-2\sin x\geq h(0)=0$,即$2x\geq 2\sin x$,

所以当$x\geq 0$时,$a(x+1)^2>2\sin x$,即$f(x)>0$,所以此时函数$f(x)$不存在零点;

当$x\leq -\pi$时,$a(x+1)^2>\frac{1}{2}(-\pi+1)^2>2$,而$-2\leq 2\sin x\leq 2$,此时$a(x+1)^2>2\sin x$,

即$f(x)>0$,所以此时函数$f(x)$不存在零点;

当$-\pi<x<0$时,$-2\leq 2\sin x<0$,而$a(x+1)^2>0$,所以$a(x+1)^2>2\sin x$,

即$f(x)>0$,所以此时函数$f(x)$不存在零点.

综上可得,$a>\frac{1}{2}$时,函数$f(x)$不存在零点.