

江苏省仪征中学高三数学小题校本作业(4)

1.D

【解】在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $\sin A = \frac{3}{5}$, 所以 $\cos A = \pm \frac{4}{5}$, 所以 $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = |\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}| \cos A = \pm 4$,

故选 D.

2.B

【解】因为 $x^6 = [(x+1)-1]^6$, 所以展开式的通项为 $T_{r+1} = C_6^r \cdot (x+1)^{6-r} \cdot (-1)^r$,

令 $6-r=3$, 则 $r=3$, 所以 $a_3 = C_6^3 \cdot (-1)^3 = -20$, 故选 B.

3.C

【解】 $\because \log_{2020} 1 < \log_{2020} \sqrt{2021} < \log_{2020} 2020 = 1$, $\therefore 0 < a < 1$, $\therefore \ln \frac{2020}{2021} < \ln 1 = 0$, $\therefore b < 0$,

$\therefore 2020^{\frac{1}{2020}} > 2020^0 = 1$, $\therefore c > 1$, $\therefore c > a > b$, 故选 C.

4.B

【解】 $(m+5)^2 + n^2 = 1$ 所确定的点 (m, n) 的轨迹是以 $(-5, 0)$ 为圆心, 半径为 1 的圆,

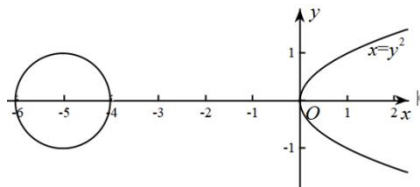
$(a^2 - m)^2 + (a - n)^2$ 可以看作是点 (a^2, a) 到点 (m, n) 的距离的平方.

又点 (a^2, a) 在抛物线 $x = y^2$ 上, 见下图:

由图可知, 点 (m, n) 与点 (a^2, a) 距离最近时, 是点

$(-4, 0)$ 到点 $(0, 0)$ 的距离, $d^2 = 16$,

$(a^2 - m)^2 + (a - n)^2$ 的最小值为 16. 故选 B.



5.ABC

【解】因为 $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$, 故 $e^{i\pi} + 1 = 0$, 故 A 正确.

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$, $e^{-ix} = \cos(-x) + i \sin(-x) = \cos x - i \sin x$,

所以 $e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x$, $e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x$, 故 C 正确, D 错误.

而 $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2019} = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)^{2019} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{2019} = e^{673\pi i} = \cos 673\pi + i \sin 673\pi = -1$.

故 B 正确, 故选 ABC.

6.ABC

【解】如图所示: 由正四面体 $S-NPQ$ 中,

截角四面体由 4 个边长为 a 的正三角形, 4 个边长

为 a 的正六边形构成, 故 $S = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 4 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 7\sqrt{3}a^2$,

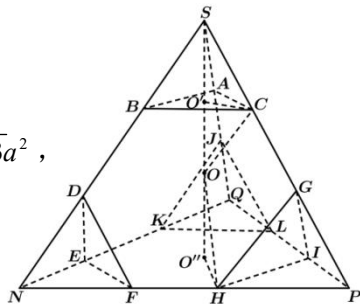
A 正确; $\because$ 棱长为 a 的正四面体的高 $h = \frac{\sqrt{6}}{3}a$,

$\therefore V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}(3a)^2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot (3a) - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{23\sqrt{2}}{12}a^3$,

B 正确; 设外接球的球心为 O , $\triangle ABC$ 的中心为 O' , $\triangle NPQ$ 的中心为 O'' , $\therefore$ 截角四面

体上下底面距离为 $\sqrt{6}a - \frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{2\sqrt{6}}{3}a$, $\therefore \sqrt{R^2 - O'C^2} + \sqrt{R^2 - O''H^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}a$,

$\therefore \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{3}} + \sqrt{R^2 - a^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}a$, $\therefore \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}a - \sqrt{R^2 - a^2}$,



$$\therefore R^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{8}{3}a^2 + R^2 - a^2 - \frac{4\sqrt{6}}{3}a \cdot \sqrt{R^2 - a^2}, \therefore R^2 = \frac{11}{8}a^2, \therefore S = 4\pi R^2 = \frac{11}{2}\pi a^2, C \text{ 正}$$

确;

二面角 $S-BC-A$ 为锐角, 所以二面角 $A-BC-D$ 的余弦值为负值, D 错误, 故选 ABC .

$$7. \frac{6}{5}$$

【解】由题意知, $X \sim B(5, \frac{3}{m+3})$, $\therefore EX = 5 \times \frac{3}{m+3} = 3$, 解得 $m = 2$,

$$\therefore X \sim B(5, \frac{3}{5}), \therefore D(X) = 5 \times \frac{3}{5} \times (1 - \frac{3}{5}) = \frac{6}{5}.$$

8. 相切

【解】由题意可知过 A, B 两点的直线方程为 $(a+b)x - y - ab = 0$,

$$\text{圆心到直线 } AB \text{ 的距离为 } d = \frac{|-ab|}{\sqrt{(a+b)^2 + 1}}, \text{ 而 } a+b = -\frac{1}{\tan \theta}, ab = -\frac{1}{\sin \theta},$$

$$\text{因此 } d = \frac{\frac{1}{|\sin \theta|}}{\sqrt{(-\frac{1}{\tan \theta})^2 + 1}}, \text{ 化简得 } d = 1, \text{ 故直线与圆相切.}$$

$$9. \frac{\sqrt{5}}{8}$$

$$\text{【解析】} \frac{H}{D} = \frac{\frac{v^2}{4g}(1 - \cos 2\alpha)}{\frac{v^2}{g}\sin 2\alpha} = \frac{\frac{v^2}{4g} \times 2\sin^2 \alpha}{\frac{v^2}{g}\sin 2\alpha} = \frac{\frac{1}{2}\sin^2 \alpha}{2\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{4}\tan \alpha = \frac{\sqrt{5}}{8}.$$

$$10. 4\sqrt{2}$$

【解】 $\because$ 二次函数 $f(x) = ax^2 + 4x + b$ 对于 $\forall x \in R$ 都有 $f(x) \geq 0$,

$$\therefore \begin{cases} a > 0 \\ \Delta = 16 - 4ab \leq 0 \end{cases}, \therefore ab \geq 4, \text{ 又 } \exists x_0 \in R, \text{ 使 } ax_0^2 + 4x_0 + b = 0 \text{ 成立},$$

$$\therefore \Delta = 16 - 4ab \geq 0, \text{ 所以只有 } ab = 4, \text{ 又 } \because a > b, \therefore a > 2,$$

$$\text{所以 } \frac{a^2 + b^2}{a - b} = a - b + \frac{2ab}{a - b} = a - b + \frac{8}{a - b} \geq 4\sqrt{2}, \text{ 当且仅当 } \begin{cases} a = \sqrt{6} + \sqrt{2} \\ b = \sqrt{6} - \sqrt{2} \end{cases} \text{ 时取“=”}.$$

11. 【解】(1) 由题可知: $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = n - a_n$, ①

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n+1} = n + 1 - a_{n+1}, \text{ ②}$$

$$\text{②} - \text{①} \text{ 可得 } 2a_{n+1} - a_n = 1, \text{ 即 } a_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}(a_n - 1), \text{ 又 } a_1 - 1 = -\frac{1}{2}.$$

所以数列 $\{a_n - 1\}$ 是以 $-\frac{1}{2}$ 为首项, 以 $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列.

$$(2) \text{ 由 (1) 可得 } a_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n, \therefore b_n = (2 - n)(a_n - 1) = \frac{n - 2}{2^n}.$$

$$\text{由 } b_{n+1} - b_n = \frac{n+1-2}{2^{n+1}} - \frac{n-2}{2^n} = \frac{3-n}{2^{n+1}} > 0 \text{ 可得 } n < 3, \text{ 由 } b_{n+1} - b_n < 0 \text{ 可得 } n > 3.$$

所以 $b_1 < b_2 < b_3 = b_4, b_4 > b_5 > \dots > b_n > \dots$, 故 b_n 有最大值 $b_3 = b_4 = \frac{1}{8}$.

所以，对任意 $n \in N^*$ ，都有 $b_n + \frac{1}{4}t \leq t^2$ ，等价于对任意 $n \in N^*$ ，

都有 $\frac{1}{8} \leq t^2 - \frac{1}{4}t$ 成立. 所以 $t^2 - \frac{1}{4}t - \frac{1}{8} \geq 0$ ，解得 $t \geq \frac{1}{2}$ 或 $t \leq -\frac{1}{4}$ 。

所以，实数 t 的取值范围是 $\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 。