江苏省仪征中学2022—2023学年度高三第一学期期初学情检测

数学试卷

命题人：陈宏强 审核人：鲁媛媛

**一、单选题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的．**

1．设集合A＝，B＝，则AB＝ ( )

 A． B． C．{3，4} D．{3，4，5}

**答案：**C

2．已知2＋i是关于*x*的方程的根，则实数*a*＝( )

 A．2 **-**i B．**-** 4 C．2 D．4

**答案：**B

3．已知sin *θ*＋sin＝1，则sin＝ ( )

A． B． C． D．

**答案：**B

4．医学家们为了揭示药物在人体内吸收、排出的规律，常借助恒速静脉滴注一室模型来进行描述，在该模型中，人体内药物含量*x*（单位：mg）与给药时间*t*（单位：h）近似满足函数关系式，其中，*k*分别称为给药速率和药物消除速率（单位：mg/h）．经测试发现，当*t*＝23时，，则该药物的消除速率*k*的值约为( )

（参考数值：ln2≈0.69）

 A． B． C． D．

**答案：**A

5．的二项展开式中，奇数项的系数和为( )

 A． B． C． D．

**答案：**C

6．函数的图象大致为 ( )

    

 A B C D

**答案：**D

7．已知椭圆$C:\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F\_{1}，F\_{2}$，点$A$在椭圆上且位于第一象限,满足$\vec{AF\_{1}}⋅\vec{AF\_{2}}=0，∠AF\_{1}F\_{2}$的平分线与$AF\_{2}$相交于点$B$，若$\vec{AB}=\frac{3}{8}\vec{AF\_{2}}$，则椭圆的离心率为 ( )

A.$\frac{2}{7}$ B.$\frac{3}{7}$ C.$\frac{4}{7}$ D.$\frac{5}{7}$

**答案：**D

8．设 $a=\frac{1}{2\sqrt{e}}， b=ln\sqrt{2}， c=\frac{4-ln⁡4}{e^{2}}$, 则 ( )

A.$a<b<c$ B.$c<b<a$ C.$a<c<b$ D.$b<c<a$

**答案：**A

**二、 选择题：本大题共4小题，每小题5分， 共计20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求的. 全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.**

9．已知函数，则 ( )

 A．的最小正周期为

 B．将的图象上所有的点向右平移个单位长度，可得到的图象

 C．在(，)上单调递增

 D．点(，0)是图象的一个对称中心

**答案：**ACD

10．下列命题正确的是 ( )

A．若*z*1，*z*2为复数，则|*z*1*z*2|＝|*z*1|⋅|*z*2|

B．若为向量，则

C．若*z*1，*z*2为复数，且|*z*1＋*z*2|＝|*z*1－*z*2|，则*z*1*z*2＝0

D．若为向量，且，则

**答案：**AD

11．已知正四棱台的上下底面边长分别为，高为，是的中点，则 ( )

A．正四棱台的体积为

B．正四棱台的外接球的表面积为

C．平面

D．到平面的距离为

**答案：**BCD

12．某岗位聘用考核设置2个环节，竞聘者需要参加2$个环节的全部考核，2个环节的全部考$

$核$同时合格才能录用. 规定：第1环节考核3个项目，至少通过2个为合格，否则为不合格；第2环节考核5个项目，至少连续通过3个为合格，否则为不合格. 统计已有的测试数据得出第1环节每个项目通过的概率均为$\frac{1}{3}$，第2环节每个项目通过的概率均为$\frac{1}{2}$，各环节、各项目间相互独立，则 ( )

A. 竞聘者第1环节考核通过的概率为$\frac{2}{9}$

B.若竞聘者第1环节考核通过$X$个项目，则$X$的均值$E(X)=1$

C. 竞聘者第2环节考核通过的概率为$\frac{3}{16}$

D.竞聘者不通过岗位聘用考核可能性在$95\%$以上

**答案：**$BCD$

**三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．**

13．已知函数$f(x)$,①$∀x\in R,f(2-x)=f(x)$,②$∀x\in R,f(-x-1)=f(x+1)$,请写出一个同时满足条件① ②的函数$f(x)$的解析式为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

**答案：**$f(x)=cos⁡πx$**（答案不唯一）**

14．已知△*OAB*，，，，过点*O*作*OD*垂直*AB*于点*D*，点*E*满足，则的值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

**答案：**

15．“中国剩余定理”又称“孙子定理”，最早可见于中国南北朝时期的数学著作《孙子算经》卷下第二十六题，叫做“物不知数”，原文如下: 今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何? 现有这样一个相关的问题: 被3除余2且被5除余3的正整数按照从小到大的顺序排成一列，构成数列$\left\{a\_{n}\right\}$，记数列$\left\{a\_{n}\right\}$的前$n$项和为$S\_{n}$，则$\frac{S\_{n}+120}{n}$的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

**答案：**$\frac{121}{2}$

16．已知 $f(x)=\left\{\begin{matrix}e^{x}-|x+1|,x\leq a\\-x^{2}+|x|+2,x>a\end{matrix}\right.$ 恰好有三个零点, 则实数 $a$ 的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

**答案：** $0\leq a<2$

**四、解答题：本题共6小题，满分70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．**

17．（本小题满分10分）

已知数列$\left\{a\_{n}\right\}$的首项$a\_{1}=\frac{3}{5}，\frac{a\_{n+1}}{a\_{n}}=\frac{3}{4a\_{n}+1}\left(n\in N^{\*}\right)$,

(1)求证数列$\left\{\frac{1}{a\_{n}}-2\right\}$为等比数列;

(2)记$T\_{n}=\frac{1}{a\_{1}}+\frac{1}{a\_{2}}+\cdots +\frac{1}{a\_{n}}$，若$T\_{n}<20$，求$n$的最大值.

**解:** (1)由条件得$\frac{\frac{1}{a\_{n+1}}-2}{\frac{1}{a\_{n}}-2}=\frac{\frac{4a\_{n}+1}{3a\_{n}}-2}{\frac{1-2a\_{n}}{a\_{n}}}=\frac{\frac{4a\_{n}+1-6a\_{n}}{3a\_{n}}}{\frac{1-2a\_{n}}{a\_{n}}}=\frac{\frac{1-2a\_{n}}{3a\_{n}}}{\frac{1-2a\_{n}}{a\_{n}}}=\frac{1}{3}$.

所以数列$\left\{\frac{1}{a\_{n}}-2\right\}$为等比数列.

(2)由(1)得$\frac{1}{a\_{n}}-2=\left(\frac{1}{a\_{1}}-2\right)⋅\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$,

所以$\frac{1}{a\_{n}}=2-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$, 所以$T\_{n}=\frac{1}{a\_{1}}+\frac{1}{a\_{2}}+\cdots +\frac{1}{a\_{n}}=2n-\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}}{2}$,其中 0< $\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}}{2}$<1.

$$ 当n=10,T\_{10}=20-\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}}{2}<20,$$

当$n=11,T\_{11}=22-\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{11}}{2}=20+2-\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{11}}{2}=20+\frac{3+\left(\frac{1}{3}\right)^{11}}{2}>20$,

所以$n=10$.

18．（本小题满分12分）

已知锐角$△ABC$中，角$A、B、C$所对边为$a、b、c$，且$\frac{tanB+tanC+\sqrt{3}}{tanBtanC}$ $=\sqrt{3}$.

(1)求角$A$;

(2)若$a=4$，求$b+c$的取值范围.

**解:**(1)∵$\frac{tan⁡B+tan⁡C+\sqrt{3}}{tan⁡Btan⁡C}=\sqrt{3}$，∴$tan⁡B+tan⁡C+\sqrt{3}=\sqrt{3}tan⁡Btan⁡C$,

∴$tan⁡B+tan⁡C=\sqrt{3}(tan⁡Btan⁡C-1)$ ，∴$\frac{tan⁡B+tan⁡C}{1-tan⁡Btan⁡C}=-\sqrt{3}$,

∴$tan⁡(B+C)=-\sqrt{3}$，∴$tan⁡A=-\sqrt{3}$.

又∵$0<A<\frac{π}{2}$，∴$A=\frac{π}{3}$.

(2)∵$a=4,A=\frac{π}{3}$,由正弦定理,有$\frac{b}{sin⁡B}=\frac{c}{sin⁡C}=\frac{a}{sin⁡A}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$,

∴$b=\frac{8\sqrt{3}}{3}sinB,$

$ c=\frac{8\sqrt{3}}{3}sinC=\frac{8\sqrt{3}}{3}sin⁡\left(\frac{2π}{3}-B\right)=\frac{8\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}cosB+\frac{1}{2}sinB\right)=4cosB+\frac{4\sqrt{3}}{3}sinB$,

∴$b+c=4\sqrt{3}sin⁡B+4cos⁡B=8sin⁡\left(B+\frac{π}{6}\right)$,

又∵$△ABC$为锐角三角形,

∴$\left\{\begin{array}{c}0<B<\frac{π}{2}，\\0<\frac{2π}{3}-B<\frac{π}{2}，\end{array}\right.$即$\frac{π}{6}<B<\frac{π}{2}$,∴$\frac{π}{3}<B+\frac{π}{6}<\frac{2π}{3}$,∴$\frac{\sqrt{3}}{2}<sin⁡\left(B+\frac{π}{6}\right)⩽1$,

∴$b+c$的取值范围为$(4\sqrt{3},8]$.

19．（本小题满分12分）

如图，在三棱台$ABC-A\_{1}B\_{1}C\_{1}$中，$AB⊥AC，AB=AC=4，A\_{1}A=A\_{1}B\_{1}=2$，侧棱$A\_{1}A⊥$平面$ABC$，点$D$是棱$CC\_{1}$的中点.

(1)证明: 平面$BB\_{1}C⊥$平面$AB\_{1}C$;

(2)求二面角$C-BD-A$的正弦值.

**答案：**(1)证明:因为$A\_{1}A⊥$平面$ABC,AC⊂$平面$ABC$,所以$AA\_{1}⊥AC$,

又$AB⊥AC,AA\_{1}∩AB=A,AA\_{1},AB⊂$平面$ABB\_{1}A\_{1}$,所以$AC⊥$平面$ABB\_{1}A\_{1}$.

又$BB\_{1}⊂$平面$ABB\_{1}A\_{1}$,所以$AC⊥BB\_{1}$.

又因为$AB\_{1}=\sqrt{2^{2}+2^{2}}=2\sqrt{2},BB\_{1}=\sqrt{(4-2)^{2}+2^{2}}=2\sqrt{2}$,所以$AB^{2}=AB\_{1}^{2}+BB\_{1}^{2}$,

所以$AB\_{1}⊥BB\_{1}$.

又$AB\_{1}∩AC=A,AB\_{1},AC⊂$平面$AB\_{1}C$,所以$BB\_{1}⊥$平面$AB\_{1}C$,

因为$BB\_{1}⊂$平面$BB\_{1}C$,所以平面$BB\_{1}C⊥$平面$AB\_{1}C$.

(2)解:以$A$为坐标原点,$AB,AC,AA\_{1}$所在的直线分别为$x,y,z$轴建立空间直角坐标系,如图所示.

因为$AB=AC=4,A\_{1}A=A\_{1}B\_{1}=A\_{1}C\_{1}=2$,

所以$A(0,0,0),B(4,0,0),C(0,4,0),C\_{1}(0,2,2),D(0,3,1)$.

设平面$ABD$的一个法向量为$n\_{1}=\left(x\_{1},y\_{1},z\_{1}\right)$,

设平面$CBD$的一个法向量为$n\_{2}=\left(x\_{2},y\_{2},z\_{2}\right)$,且$\vec{AB}=\left(4,0,0\right),$

$\vec{AD}=(0,3,1),\vec{CB}=(4,-4,0),\vec{CD}=(0$,$-1,1)$,

因为$\left\{\begin{array}{c}\vec{AB}⋅n\_{1}=0,\\\vec{AD}⋅n\_{1}=0,\end{array}\right.$ 所以$\left\{\begin{array}{c}x\_{1}=0,\\3y\_{1}+z\_{1}=0,\end{array}\right.$

令$y\_{1}=1$,则$x\_{1}=0,z\_{1}=-3$,所以$n\_{1}=(0,1,-3)$.

又因为$\left\{\begin{array}{c}\vec{CB}⋅n\_{2}=0,\\\vec{CD}⋅n\_{2}=0,\end{array}\right.$ 所以$\left\{\begin{array}{c}x\_{2}-y\_{2}=0,\\y\_{2}-z\_{2}=0,\end{array}\right.$

令$x\_{2}=1$,则$y\_{2}=1,z\_{2}=1$,所以$n\_{2}=(1,1,1)$.

所以$cos<n\_{1},n\_{2}>=\frac{n\_{1}⋅n\_{2}}{\left|n\_{1}\right|\left|n\_{2}\right|}=\frac{1-3}{\sqrt{3}⋅\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{30}}{15}$.

设二面角$C-BD-A$的大小为$θ$,则$sin⁡θ=\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{30}}{15}\right)^{2}}=\frac{\sqrt{195}}{15}$,

所以二面角$C-BD-A$的正弦值为$\frac{\sqrt{195}}{15}$.

20．（本小题满分12分）

日前，中华人民共和国应急管理部公布了《高层民用建筑消防安全规定》.其中提到：在公共门厅等地停放电动车或充电，拒不改正的个人，最高可处以100元罚款，为了研究知晓规定是否与年龄有关，某市随机抽取125名市民进行抽样调查，得到如下2×2列联表∶

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 知晓 | 不知晓 | 总计 |
| 年龄≤60 | 16 | 34 | 50 |
| 年龄>60 | 9 | 66 | 75 |
| 总计 | 25 | 100 | 125 |

参考公式∶，其中

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0.10 | 0.05 | 0.025 | 0.010 | 0.005 | 0.001 |
|  | 2.706 | 3.841 | 5.024 | 6.635 | 7.879 | 10.828 |

(1)根据以上统计数据，是否有的把握认为知晓规定与年龄有关?

(2)将上述调查所得的频率视为概率，现在从本地所有市民中，采用随机抽样的方法抽取 位市民，记被抽取的位市民中知晓规定的人数为，求的分布列及数学期望.

**解:** (1)，

而,故有的把握认为知晓规定与年龄有关.

(2)易知服从二项分布,则,

则的分布列为

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|  |  |  |  |  |  |

的数学期望为.

21．（本小题满分12分）

已知曲线的焦点为，曲线上有一点满足，过原点作两条相互垂直的直线交曲线于异于原点的两点.

(1)求证：直线与轴相交于定点；

(2)试探究轴上是否存在定点满足恒成立.若存在，请求出点坐标；若不存在，请说明理由.

**答案：**(1)$Q\left(x\_{0},p\right)$在$y^{2}=2px$上，即$p^{2}=2px\_{0}$，解得$x\_{0}=\frac{p}{2}$，所以$|QF|=x\_{0}-\left(-\frac{p}{2}\right)=p=2$，

故抛物线为$y^{2}=4x$，易知直线$AB$的斜率不为0，

故设$l\_{AB}:x=ty+n，A\left(x\_{1},y\_{1}\right)，B\left(x\_{2},y\_{2}\right)$，联立$\left\{\begin{matrix}x=ty+n\\y^{2}=4x\end{matrix}⇒y^{2}-4ty-4n=0\right.$，

故$y\_{1}+y\_{2}=4t，y\_{1}y\_{2}=-4n$，所以$x\_{1}x\_{2}=\frac{y\_{1}^{2}}{4}⋅\frac{y\_{2}^{2}}{4}=n^{2}$，

因为$OA⊥OB$，则$\vec{OA}⋅\vec{OB}=x\_{1}x\_{2}+y\_{1}y\_{2}=n^{2}-4n=0$，则$n=4$或$n=0$（舍）,

故$N(4,0)$.

(2)假设存在，设$M(m,0)$，其中$m\ne 4$，因为$\frac{S\_{△ANM}}{S\_{△BNM}}=\frac{AM}{BM}$，那么$\frac{AM}{BM}=\frac{AN}{BN}$，

则$x$轴为$∠AMB$的角平分线，

若$m=x\_{1}$，则$AM$垂直于$x$轴，$x$轴平分$∠AMB$，则$BM$垂直于$x$轴，

则直线$AB$的方程为$x=4$，此时$m=4=n$，而$M，N$相异，故$m\ne x\_{1}$，

同理$m\ne x\_{2}$故$AM$与$BM$的斜率互为相反数，

$$\begin{matrix}& 即\frac{y\_{1}}{x\_{1}-m}+\frac{y\_{2}}{x\_{2}-m}=0⇒m=\frac{x\_{1}y\_{2}+x\_{2}y\_{1}}{y\_{1}+y\_{2}}\\& ⇒m=\frac{\left(ty\_{1}+4\right)y\_{2}+\left(ty\_{2}+4\right)y\_{1}}{y\_{1}+y\_{2}}=\frac{2ty\_{1}y\_{2}}{y\_{1}+y\_{2}}+4=\frac{-32t}{4t}+4=-4为定值.\end{matrix}$$

故当$M(-4,0)$时，$\frac{S\_{△ANM}}{S\_{△BNM}}=\frac{AM}{BM}$恒成立.

22．（本小题满分12分）

已知函数（为自然对数的底数）.

(1)若，求实数的取值范围；

(2)若不等式在上恒成立，求实数的取值范围.

**答案：**（1）由题意可知，，整理得，解得；

（2）设，则原不等式可化为，

整理得在上恒成立，设，

则，

① 当时，恒成立，所以单调递减，所以，不符题意；

② 当时，设，则，所以单调递增，

（i）若，即时，恒成立，即恒成立，

所以单调递增，所以，符合题意；

（ii）若，即时，，

所以存在，使得，则当时，，即，

所以在上单调递减，所以，不符题意；

综上，的取值范围为.