

江苏省仪征中学 2021 届高三数学考前保温训练 (2)

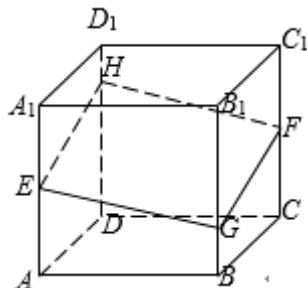
班级_____姓名_____用时_____得分_____

一、单项选择题:

3. 若 $\frac{1 + \sin 2\alpha}{1 - 2 \sin^2 \alpha} = 2$, 则 $\tan \alpha =$ ()
- A. $\frac{1}{3}$ B. -1 C. $\frac{1}{3}$ 或 -1 D. $-\frac{1}{3}$
4. 《张邱建算经》曾有类似记载:“今有女子善织布, 逐日织布同数递增(即每天增加的数量相同)”. 若该女子第一天织布两尺, 前二十日共织布六十尺, 则该女子第二十日报布 ()
- A. 三尺 B. 四尺 C. 五尺 D. 六尺
5. 若函数 $f(x) = \frac{2^x + a}{2^x - a}$ 为奇函数, 则实数 a 的值为 ()
- A. 1 B. 2 C. -1 D. ± 1
6. 已知直线 $y = x - 2$ 与抛物线 $y^2 = 4x$ 交于 A, B 两点, P 为 AB 的中点, O 为坐标原点, 则 $OP^2 - PA^2 =$ ()
- A. 2 B. -2 C. 4 D. -4
7. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{1}{2}x, & x \leq 0, \\ -|2x - 1| + 1, & x > 0. \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f^2(x) - (k+1)xf(x) + kx^2 = 0$ 有且只有三个不同的实数解, 则正实数 k 的取值范围为 ()
- A. $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ B. $\left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, 2)$ C. $(0, 1) \cup (1, 2)$ D. $(2, +\infty)$

二、多项选择题:

10. 已知 $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0, y > 0$, 且 $x + 2y = 1$. 则下列选项正确的是 ()
- A. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$ B. $x^2 + y^2$ 的最小值为 $\frac{1}{5}$
- C. $\frac{x - 2y}{x^2 + y^2} > 1$ D. $2^{x+1} + 4^y \geq 4$
12. 如图, 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, E, F, G, H 分别是所在棱上的动点, 且满足 $DH + BG = AE + CF = 1$, 则以下四个结论正确的是 ()
- A. E, G, F, H 四点一定共面
- B. 若四边形 $EGFH$ 为矩形, 则 $DH = CF$
- C. 若四边形 $EGFH$ 为菱形, 则 E, F 一定为所在棱的中点
- D. 若四边形 $EGFH$ 为菱形, 则四边形 $EGFH$ 周长的取值范围为 $[4, 2\sqrt{5}]$



三、填空题:

14. 已知 $\underline{M}, \underline{N}$ 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB, AC 上的中点, 点 P 在线段 MN 上, 且 $MP = 2PN$, 若 $\underline{AP} = x \underline{AB} + y \underline{AC}$, 则 $x + y =$ _____.
15. 从正四面体的四个面的中心以及四个顶点共八个点中取出四个点, 则这四个点不共面的取法总数为_____种.
16. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左焦点为 F , 若点 F 关于渐近线 $y = -\frac{b}{a}x$ 对称的点 F' 恰好落在渐近线 $y = \frac{b}{a}x$ 上, 则 F' 的坐标为____, 双曲线的离心率为_____.

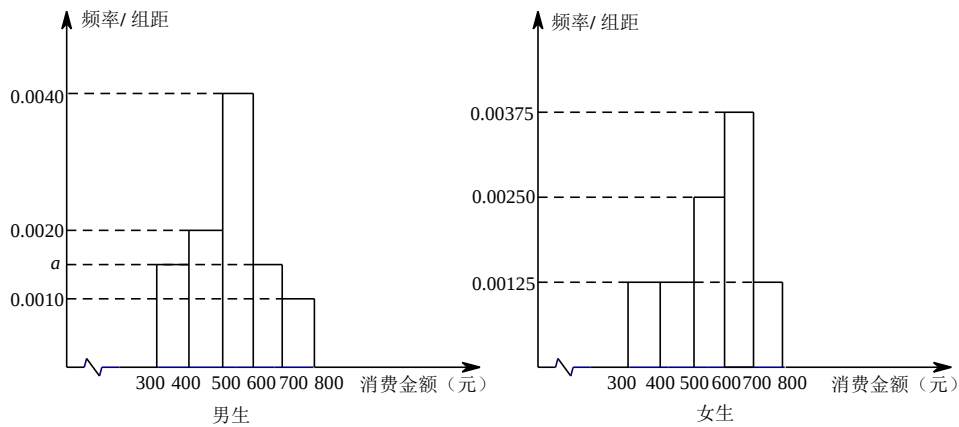
四、解答题:

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1, a_n = \begin{cases} 2a_{\frac{n}{2}}, n \text{ 为偶数}, \\ a_{n-2} + 2, n \text{ 为奇数}. \end{cases}$

(1) 求 a_{10}, a_{16} 的值;

(2) 设 $b_n = a_{2^n} \cdot a_{2^{n-1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

20. 某学校共有 3000 名学生，其中男生 1800 人，为了解该校学生在校的月消费情况，采取分层抽样的方式，抽取 100 名学生进行调查，先统计他们某月的消费金额，然后按“男、女”性别分成两组，再分别将两组学生的月消费金额分成 5 组： $[300,400)$ ， $[400,500)$ ， $[500,600)$ ， $[600,700)$ ， $[700,800)$ 分别加以统计，得到如图所示的频率分布直方图。



(1)样本中将月消费金额不低于 600 元的学生称为“高消费群”. 请你根据已知条件完成下列 2×2 列联表，并判断是否有 97.5% 的把握认为该校学生属于“高消费群”与“性别”有关？

	属于“高消费群”	不属于“高消费群”	合计
男			
女			
合计			

(参考公式： $K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}$ ，其中 $n = a + b + c + d$)

$P(K^2 \geq k)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

(2)以样本估计总体，以调查所得到的频率视为概率，现从该学校中随机每次抽取 1 名学生，共抽取 4 次，且每次抽取的结果是相互独立的，记被抽取的 4 名学生中“高消费群”的人数为 x ，求 x 的期望 $E(x)$ 和方差 $D(x)$.

21. 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 与 x 轴交于点 $A(-2, 0)$ ，过圆上一动点 M 作 x 轴的垂线，垂足为 H ，设 MH 的中点为 N ，记 N 的轨迹为曲线 C 。
- (1) 求曲线 C 的方程；
- (2) 过 $(-\frac{6}{5}, 0)$ 作与 x 轴不重合的直线 l 交曲线 C 于 P, Q 两点，直线 OQ 与曲线 C 的另一交点为 S ，设直线 AP, AS 的斜率分别为 k_1, k_2 。证明： $k_1 = 4k_2$ 。

江苏省仪征中学 2021 届高三数学考前保温训练（2）数学答案

题号	3	4	5	6	7	10	12
选项	A	B	D	D	B	BD	AD

14. $\frac{1}{2}$

15. 60

16. $(a, b); 2$

18. 解：（1） $a_{10} = 2a_5 = 2(a_1 + 4) = 10$ 2 分

$a_{16} = 2a_5 = 16a_1 = 16$ 4 分

（2）因为 $a_{2n+1} - a_{2n-1} = 2$ ， $a_1 = 1$ ，

所以 $\{a_{2n-1}\}$ 是以 1 为首项，公差为 2 的等差数列，

所以 $a_{2n-1} = 1 + (n-1) \times 2 = 2n-1$ 7 分

因为 $a_{2^n} = 2a_{2^{n-1}}$ ， $a_1 = 1 \neq 0$ ，所以 $a_{2^n} \neq 0$ ，所以 $\frac{a_{2^n}}{a_{2^{n-1}}} = 2$ ，

所以 $\{a_{2^n}\}$ 是以 1 为首项，公比为 2 的等比数列，

所以 $a_{2^n} = a_1 \times 2^n = 2^n$ 10 分

所以 $b_n = a_{2^n} \cdot a_{2n-1} = (2n-1)2^n$

综上所述：数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = (2n-1)2^n$ 12 分

本题还可以①求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项之和；②证明：数列 $\{a_n\}$ 为等差数列。

20. 解：（1）依据频率分布直方图得：

	属于“高消费群”	不属于“高消费群”	合计
男	15	45	60
女	20	20	40
合计	35	65	100

.....2 分

提出假设 H_0 ：“高消费群”与“性别”无关，

因为 $K^2 = \frac{100 \times (15 \times 20 - 45 \times 20)^2}{60 \times 40 \times 35 \times 65} = \frac{600}{91} \approx 6.593 > 5.024$ ，

所以有 97.5% 的把握认为该校学生属于“高消费群”与“性别”有关 ...6 分

(2) 4 名学生中每一名学生是“高消费群”的概率为 $\frac{35}{100} = \frac{7}{20}$,

所以 $X \sim B\left(4, \frac{7}{20}\right)$, 所以 $E(X) = 4 \times \frac{7}{20} = \frac{7}{5}$ 9 分

$D(X) = 4 \times \frac{7}{20} \times \left(1 - \frac{7}{20}\right) = \frac{91}{100}$ 12 分

21. 解: (1) 设 $N(x, y)$, 则 $M(x, 2y)$,

因为动点 M 在圆 O 上,

所以 $x^2 + 4y^2 = 4$, 即 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$,

所以曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 4 分

(2) 设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, 直线 AQ 的斜率为 k , 直线 $l: x = my - \frac{6}{5}$,

由 $\begin{cases} x = my - \frac{6}{5} \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$ 联立得: $(m^2 + 4)y^2 - \frac{12}{5}my - \frac{64}{25} = 0$,

$y_1 + y_2 = \frac{12m}{5(m^2 + 4)}$, $y_1 y_2 = \frac{-64}{25(m^2 + 4)}$, $\Delta = 16m^2 + \frac{1024}{25} > 0$ 6 分

$kk_1 = \frac{y_1}{x_1 + 2} \times \frac{y_2}{x_2 + 2} = \frac{y_1 y_2}{\left(my_1 + \frac{4}{5}\right)\left(my_2 + \frac{4}{5}\right)} = \frac{y_1 y_2}{m^2 y_1 y_2 + \frac{4}{5}m(y_1 + y_2) + \frac{16}{25}}$

$= \frac{\frac{-64}{25(m^2 + 4)}}{m^2 \frac{-64}{25(m^2 + 4)} + \frac{4}{5}m \times \frac{12m}{5(m^2 + 4)} + \frac{16}{25}} = \frac{-64}{-64m^2 + 48m^2 + 16(m^2 + 4)} = -1$ ① ...9 分

$kk_2 = \frac{y_2}{x_2 + 2} \times \frac{-y_2}{-x_2 + 2} = \frac{y_2^2}{x_2^2 - 2} = \frac{1 - \frac{x_2^2}{4}}{x_2^2 - 4} = -\frac{1}{4}$ ②11 分

① $\div$ ② 得: $k_1 = 4k_2$ 12 分