



求导函数零点受阻怎么办

浙江省绍兴鲁迅中学 宋胜良 (邮编:312050)

导数作为衔接初等数学和高等数学的纽带,是研究函数性质、培养学生探究能力的重要工具,同时也是历年高考的热点内容.我们经常用导函数的正负性来研究函数的单调性,这势必会触及导数的零点,当导数的零点求解遇阻,我们又该如何面对?本文笔者将结合考题谈一谈当零点求解遇阻时的三点处理策略,供参考.

想法1 按兵不动——根本不用求

当求导数零点受阻时,第一种想法便是导函数或许就没有零点,那么导函数在给定研究区间内恒正或恒负,从而也知道了函数的单调性,为解决问题奠定了关键的基础.

例1 (2014福建高考理)当 $x > 0$ 时,证明: $x^2 < e^x$.

解析 $x^2 < e^x$,即证: $x^2 - e^x < 0$,构造函数 $g(x) = x^2 - e^x$,只需证明 $g_{\max}(x) < 0$, $g'(x)$

$= 2x - e^x$,在这里,我们求 $g'(x)$ 的零点受阻.承接想法1,于是首先考虑 $g'(x)$ 会不会恒正或者恒负呢?通过求二阶导数 $g''(x) = 2 - e^x$,易知当 $x \in (0, \ln 2)$ 时, $g''(x) < 0$,当 $x \in (\ln 2, +\infty)$ 时, $g''(x) > 0$,故 $g'(x)$ 在 $(0, \ln 2)$ 内单调递减,在 $(\ln 2, +\infty)$ 内单调递增,所以 $g'_{\min}(x) = g'(\ln 2) = 2\ln 2 - e^{\ln 2} = 2\ln 2 - 2 < 0$,进一步得到 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递减,所以 $g(x) < g(0) = 0$,得证.

导数是解决函数单调性的重要工具,对导函数的研究我们一直关注其正负性,对正负性的研究势必触及导函数的零点,当求导函数的零点遇阻时,我们可以去大胆地猜想是不是导函数压根就没有零点,从而去验证导函数是不是恒正或恒负.

想法2 趁火打劫——大胆去猜凑

对变式2解法(略),学生通过上题解答,积累了解题经验,从而自然想到寻找解题的通法.归结到变式1的解法上,或将四边形转化为特殊的平行四边形和直角三角形来解,更多的是学生的直观和经验,这应该是学生最容易想到的.最容易想到的,也许最靠近最近发展区.而这一点,在解题教学中特别重要,它是解题教学的灵魂.

3 多题归一——提炼共性与多题通解

在解题过程中,时时注意寻求知识之间的联系,把同类的问题进行归纳整理,通过“多题归一”(这里“归一”指的是找到一类题目的本源),提炼共性,寻找解题通法.更主要的还是提炼分析题目的策略,思考问题的方法(数学思想、思维方式).

本题实质上就是:已知四边形 $ODPE$ 的两边长 $PD = 3$, $PE = 1$,四个内角即 $\angle D = \angle E = 90^\circ$, $\angle DOE = 45^\circ$, $\angle DPE = 135^\circ$,求第三边 OD 的长.

例题及变式1、变式2的解答可归结为:已知

四边形 $ODPE$ 的两边和四角,求未知边长.也就是说,此题的实质是解四边形.解四边形模型的建立,不仅为问题的解决提供了“模型”,而且有助于解法的探索,问题的解决和问题本质的揭示.变式1、变式2的改编和解答归结到例题的解法,达到多题归一的目的.可见,多题归一可以让学生知其解法,晓其变法,通其精髓,教会学生的不仅仅是会解一题,而是一类,达到“做一题、会一类、通一片”的教学效果.

综上所述,从一题多解、一题多变到多题归一,均有利于开阔学生解决问题的视野,发展学生的数学思维.但要强调的是,无论我们运用哪种解题教学模式,都不应只停留在解题或编题上.如果我们能引导学生进一步反思,一道题为何能多解?多题归一背后的深层次结构是什么?这才是提升学生解题能力的关键所在,也是我们在解题教学中值得反思的问题!

(收稿日期:2016-06-15)

上面已经介绍了想法1,但是导函数未实现恒正或恒负,也就是说导函数的零点是有的,但是方程又无法解,我们该怎么办?此时去猜或者凑导函数的零点不失为一种很好的意识,一旦成功,将会对问题的解决产生决定作用.

例2 (2008 湖南高考理)已知函数 $f(x) = \ln^2(1+x) - \frac{x^2}{1+x}$. 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

解析 求函数的单调区间,关键是研究导数的正负性,可先求 $f'(x)$, 其定义域为 $(-1, +\infty)$.

$$f'(x) = \frac{2(1+x)\ln(1+x) - x^2 - 2x}{(1+x)^2}, \text{ 在}$$

这里再一次遇到了不可求解的方程.

令 $g(x) = 2(1+x)\ln(1+x) - x^2 - 2x$, 这里要直接解 $g(x) > 0$ 与 $g(x) < 0$ 是不可能的事情.

于是,可以结合想法1,难道 $g(x)$ 恒正或是恒负?

$g'(x) = 2\ln(1+x) - 2x$, 依然无法下手.

$$g''(x) = \frac{-2x}{1+x}, \text{ 可知 } x \in (-1, 0) \text{ 时, } g''(x)$$

> 0 , 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $g''(x) < 0$, 故 $g'(x)$ 在 $(-1, 0)$ 内单调递增, 在 $(0, +\infty)$ 内单调递减, 故 $g'_{\max}(x) = g'(0) = 0$, 所以 $g(x)$ 在 $x \in (-1, +\infty)$ 内单调递减, 考虑 $x \rightarrow -1$ 时, $g(x) \rightarrow 1$, 故 $g(x) < 1$, 于是 $g(x)$ 恒正与恒负的希望破灭, $g(x)$ 在 $x \in (-1, +\infty)$ 上单调递减, 如果要有零点, 则有且只有1个, 大胆猜测, 发现: $g(0) = 0$, 于是当 $x \in (-1, 0)$ 时, $g(x) > 0$, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $g(x) < 0$, 于是当 $x \in (-1, 0)$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 的增区间为 $(-1, 0)$, 减区间为 $(0, +\infty)$.

导函数的零点求解受阻, 如果能够通过二阶导数知道导函数的单调性, 即导函数为增函数或减函数, 那么我们可以肯定, 导函数若有零点, 则零点有且只有一个. 如果具备以上论据, 那么我们可以大胆去猜、凑, 若能得到一个零点, 此零点也必将成为唯一的零点, 于是导函数零点求解受阻问题便迎刃而解, 函数的单调性也得到了妥

善的解决.

想法3 釜底抽薪——设而不求法

有的时候, 我们发现, 即使能够推出导函数具备单调性, 但是始终无法让导函数恒正或者恒负, 并且无法通过猜、凑去得到导函数的零点, 这个时候, 我们的无奈便是: 导函数明明存在着零点, 就是求不出来. 这个时候我们该怎么办呢? 在这里给大家介绍设而不求的思想.

例3 已知函数 $f(x) = x \ln x (x > 0)$, 求证: 当 $x > 0$ 时, $e^x > f'(x) + 1$.

解析 $f'(x) = \ln x + 1$, 即证: $e^x > \ln x + 2$, 记函数 $g(x) = e^x - \ln x - 2$, 只需证明 $g_{\min}(x) > 0$. $g'(x) = e^x - \frac{1}{x} = \frac{xe^x - 1}{x}$, 记 $h(x) = xe^x - 1$, 对于 $h(x)$ 的零点求解受阻.

我们可以先运用想法1和想法2, 研究 $h(x) = xe^x - 1$ 的单调性, $h'(x) = (x+1)e^x (x > 0)$, 显然 $h'(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 恒成立, 即 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, $h(x) > h(0) = -1$, 再有 $h(1) = e - 1 > 0$, 所以 $h(x)$ 必定有正有负, 零点必定唯一存在. 这样想法1完全破灭, 对于想法2确实无能为力. 于是我们设 $h(x_0) = x_0 e^{x_0} - 1 = 0$, 这样当 $x \in (0, x_0)$ 时, $h(x) < 0$, 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $h(x) > 0$, 故 $x \in (0, x_0)$ 时, $g'(x) < 0$, 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, 故 $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 单调递增. 所以 $g_{\min}(x) = g(x_0) = e^{x_0} - \ln x_0 - 2 = \frac{1}{x_0} + x_0 - 2 \geq 2\sqrt{\frac{1}{x_0} \cdot x_0} - 2 = 0$, 因为 $x_0 \neq 1$, 故上式等号不成立, 即 $g_{\min}(x) > 0$, 得证.

设而不求是数学解题中的一种很有用的手段, 采用设而不求的策略, 往往能避免盲目推演而造成的无益的循环运算, 从而达到准确、快速、简捷的解题效果.

导函数的零点关系着导数的正负性, 与函数的单调性密切相关, 有效解决“求导函数零点受阻的问题”刻不容缓, 愿本文能对读者有所帮助.

(收稿日期: 2016-07-02)