“外接球问题”解法小议

文/周晓瑞

摘　要：多面体的外接球是一个使得该多面体的所有顶点都在其上的球面，每个多面体至多有一个外接球，也就是说，如果某个多面体有外接球，那么它的外接球是唯一的。由于这个唯一性使得外接球问题成为历年高考的热点，也成了学生眼中的难点，为了让学生能快速、准确地解决这类问题，归纳总结几种常用的解答方法：性质法；构造法：根据多面体的特征常构造长方体、正方体、直棱柱等；逐个击破法。

关键词：外接球；性质法；构造法；长方体；正方体；直棱柱；逐个击破法

高中立体几何中常见的几何体有柱体、锥体、台体和球体，在大多数学生眼中球体是最简单的几何体，因为它的定义是圆的定义的拓展，高中数学教材给出来的知识点只有两个公式：$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$ 和 $S_{球}=4\pi R^2$（R 是球的半径）。但是如果到了高三大综合训练时，就会觉着与球体有关的问题，特别是几何体的外接球问题，一点都不简单，甚至有些学生把它归到了难题里边。为了让学生能快速、准确地解决这类问题，我在这里总结了几种常用的方法。

方法一：性质法

利用几何体本身的结构特征，如对称性，确定球心位置，再结合平面几何知识求解半径的大小。

例 1.在正三棱锥 $S-ABC$ 中，侧棱 $SA=SB=SC=2$，底面边长为 1，则该三棱锥 $S-ABC$ 的外接球半径是________。

分析：根据正棱锥的结构特征，直接可以确定其外接球球心一定在其高线上，故可结合平面几何知识建立关于半径的关系求解。

解：如图 1 所示，

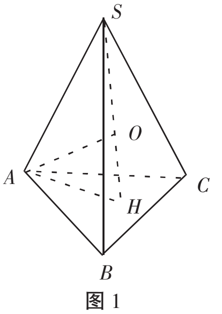

图 1

取正$\triangle ABC$ 的中心 H，连接 SH、AH，

由正三棱锥知，$SH\perp$平面 ABC，设外接球球心为 O，半径为 r，则球心一定在高线 SH 上，连接 OA，则

在 Rt$\triangle SHA$ 中，$SA=2$，$AH=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}AB=\frac{\sqrt{3}}{3}\times 1=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$OS=OA=r$

$\therefore SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=\sqrt{2^2-(\frac{\sqrt{3}}{3})^2}=\frac{\sqrt{33}}{3}$

$\therefore$ 在 Rt$\triangle OAH$ 中，$OH=SH-OS=\frac{\sqrt{33}}{3}-r$，$OA^2=AH^2+OH^2$

$\therefore r^2=(\frac{\sqrt{3}}{3})^2+(\frac{\sqrt{33}}{3}-r)^2$

解之得 $r=\frac{2\sqrt{33}}{11}$

即正三棱锥 $S-ABC$ 的外接球半径是 $\frac{2\sqrt{33}}{11}$。

规律小结：

当几何体是正棱锥、直棱柱、正棱柱、正棱台且它们的底面的外接圆半径可以确定时，其外接球问题均可采用性质法。

方法二：构造法

当题目中所给的几何模型可以通过连接长方体、正方体等特殊的柱体、锥体的顶点而得到时，就常采用构造法求解。这种解法的好处在于把问题等价转化成了长方体、正方体等特殊的柱体、锥体的外接球问题，而这些几何体比较容易确定其外接球的球心位置和半径大小。

1.构造长方体

例 2.设 A、B、C、D 是球 O 上的四点，若 BA、BC、BD 两两互相垂直，且 $BA=BC=\sqrt{2}$，$BD=2\sqrt{3}$，则 OD 与平面 ABC 所成的角为（　　）

A.$\frac{\pi}{6}$　　B.$\frac{\pi}{4}$　　C.$\frac{\pi}{3}$　　D.$\frac{\pi}{2}$

分析：因为 BA、BC、BD 两两互相垂直，这是长方体具有的最基本特点，所以此题可采用构造长方体的方法求解。

解：由题意可构造以 BA、BC、BD 为棱的长方体 DE（如下图 2）

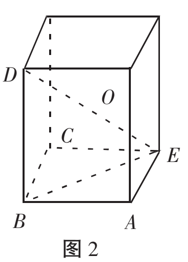

图 2

且 $BA=BC=\sqrt{2}$，$BD=2\sqrt{3}$，

$\therefore$ 球心 O 是线段 DE 的中点

故由长方体的性质易得，$\angle DEB$ 为 OD 与平面 ABC 所成的角。且$\angle DBE=\frac{\pi}{2}$，$BE=\sqrt{2}BA=2$，$BD=2\sqrt{3}$，

$\therefore\tan\angle DEB=\frac{DB}{BE}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

$\therefore\angle DEB=\frac{\pi}{3}$，故选 C.

例 3.在三棱锥 $S-ABC$ 中，$SA=BC=\sqrt{5}$，$SC=AB=\sqrt{17}$，$SB=AC=2\sqrt{5}$，求三棱锥 $S-ABC$ 的外接球的表面积.

分析：由题意可知三棱锥具有对棱相等的特点，而在长方体中有许多组异面直线段长度相等，所以本题可采用构造长方体的

方法求解。

解：由于长方体中相对的面的对角线长度相等，故可构造长方体（如图 3），因而三棱锥 $S-ABC$ 的外接球就是此长方体的外接球.

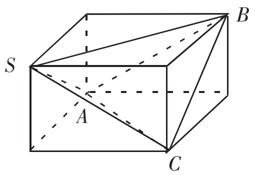

图 3

设长方体的长、宽、高分别为 a、b、c，其外接球半径为 R，

$$\therefore\begin{cases}a^2+b^2=AC^2=(2\sqrt{5})^2\\ b^2+c^2=BC^2=(\sqrt{5})^2\\ a^2+c^2=AB^2=(\sqrt{17})^2\\ R=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}\end{cases}$$

解之得 $R=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$

$\therefore S_{球}=4\pi R^2=4\pi(\dfrac{\sqrt{21}}{2})^2=21\pi$

例 4.如图 4，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 平面 ABC，$\angle CBA=\dfrac{\pi}{2}$，$PA=2$，$AB=\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{3}$，则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球半径是______.

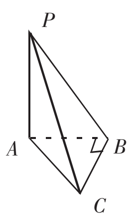

图 4

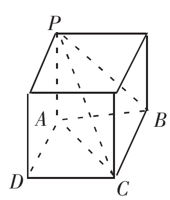

图 5

分析：由题可以确定三棱锥 $P-ABC$ 的四个面均是直角三角形，而我们平常见过的几何体中长方体中的直角三角形居多，故可考虑用构造长方体的方法求解.

解：由题可构造以 AB、BC、PA 为棱的长方体 PC（如图 5）

$\therefore$ 三棱锥 $P-ABC$ 的外接球就是长方体 PC 的外接球

$\therefore$ 外接球半径为 $\dfrac{\sqrt{AB^2+BC^2+PA^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{\sqrt{2}^2+\sqrt{3}^2+2^2}}{2}=\dfrac{3}{2}$

2.构造正方体

例 5.棱长为 $\sqrt{2}$ 的正四面体的外接球体积是________.

分析：正四面体的各条棱均相等，且相对的棱异面垂直，而正方体的所有面对角线均相等，且相对的两个面内的异面对角线还互相垂直，故我们可以采用构造正方体的方法求解.

解：在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$（如图 6）中，

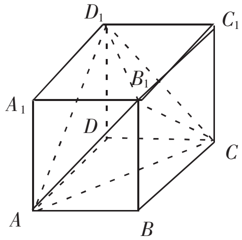

图 6

连接 AC、AB_1、AD_1、B_1C、B_1D_1、D_1C，易知，四面体 $A-B_1D_1C$ 为正四面体.

$\therefore$ 正四面体 $A-B_1D_1C$ 的外接球就是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的外接球.

$\because AB_1=\sqrt{2}$　$\therefore AB=1$　$\therefore AC_1=\sqrt{3}$

$\therefore$ 正四面体 $A-B_1D_1C$ 的外接球半径是 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore$ 正四面体 $A-B_1D_1C$ 的外接球体积是 $\dfrac{4}{3}\pi(\dfrac{\sqrt{3}}{2})^3=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$

3.构造直棱柱

例 6.如图 7，在三棱锥 $D-ABC$ 中，$DB\perp$ 平面 ABC，$\angle BAC=120°$，$BC=\sqrt{3}$，$DB=2$，则三棱锥 $D-ABC$ 的外接球半径 R 为____________.

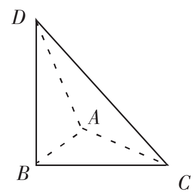

图 7

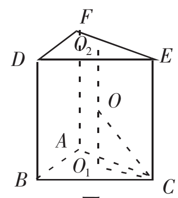

图 8

分析：根据题意易知 $DB\perp AB$，$DB\perp BC$，但 $\angle ABC\neq\dfrac{\pi}{2}$，所以此题构造不成长方体或正方体，仅能构造成直棱柱，而我们根据直棱柱的结构特征可知：直棱柱的外接球球心一定在上、下底面的外接圆圆心连线的中点处，故本题可采用构造直棱柱法求解.

解：由题构造直三棱柱 $ABC-FDE$（如图 8），其中 $\angle BAC=120°$，$BC=\sqrt{3}$，$DB=2$，

$\therefore$ 三棱锥 $D-ABC$ 的外接球就是直三棱柱 $ABC-FDE$ 的外接球.

设 $\triangle ABC$、$\triangle DEF$ 的外接圆圆心分别为 O_1、O_2，连接 O_1O_2，则直三棱柱 $ABC-FDE$ 的外接球球心就是线段 O_1O_2 的中点 O，连接 OC、O_1C

在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=120°$，$BC=\sqrt{3}$，由正弦定理得：$2=O_1C=\dfrac{BC}{\sin\angle BAC}$

$\therefore O_1C=1$

又在 $Rt\triangle OO_1C$ 中，$OC=R$，$OO_1=\dfrac{DB}{2}=1$

$\therefore R^2=O_1C^2+OO_1^2=2$

$\therefore R=\sqrt{2}$

规律小结：

在下列情形之下，常用构造法解决外接球问题：

（1）三棱锥的三条侧棱两两互相垂直时，常构造长方体，特别地，当三棱锥的三条侧棱两两互相垂直且相等时，可直接构造正方体.

（2）三棱锥的对棱相等时，常构造长方体，特别地，当三棱锥的各条棱相等，即为正四面体时，可直接构造正方体.

（3）三棱锥的四个面均是直角三角形时，可构造长方体.

（4）三棱锥只有一条侧棱与底面垂直时，可构造直棱柱.

方法三：逐个击破法

根据几何体的外接球的定义知，外接球的球心到几何体的各

批改高师生数学作业有感

文/王　勇

摘　要：例题练习是知识生成和发展的关键肯綮，典型例题能概括新知识的生成和发展，所以在掌握概念的基础上，教师一定要根据学生认知优选具有高度概括性的例题让学生进行适当的练习。

关键词：高中数学；经典例题；举一反三

高师生的数学作业由于学生的系科不同、年级不同而彰显一定特色，教师应立足于实际，调整自己的教学，使作业与学生的学习情况同步。怎样批改好作业？以下是笔者的一些感触。

一、批步骤

正确的步骤是学生得出正确结论的前提，无论是初学者，还是从高师生的数学现状来看，都必须要求教师利用作业这一手段，反复强调，使学生形成解题的思路。如，函数奇偶性的判断与证明，学生能否按照教师的嘱咐作出$f(-x)=-f(x)$等的判断，表面上看起来简单，实际牵扯到学生是否真正理解知识，本质就是一个程序与结果的问题。

二、批创意

所谓创意，也即学生数学思维的创造意识，学生好的创意，充满着创造性思维的精神，教师可从作业中发现，并予以欣赏，把此作为衡量教学成功的标志。如$\tan^2\theta-\sin^2\theta=\tan^2\theta\cdot\sin^2\theta$，这虽然是一个证明题，但也不乏创造意识的闪光点，学生受思维定式的影响，开始拘泥于$\tan^2\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$的使用，很难想到保留$\tan^2\theta$提取，然后再证明这一简捷方法，能否从思维定式中跳出来，其间可见学生的创意。

三、批细节

高师生文科班的学生的学习，学生主动性不高，细节不予重视，常常造成非常简单的错误。如，求$\sin(\alpha-2\pi)$和$\cos(2\pi-\alpha)$，学生能否在众多的诱导公式中保持清醒的思维，想到直接利用诱导公式一，而不是化简为繁，把本来很直接的化简用一大堆诱导公式去求，结果还错了，这就值得教师在批改作业后讲一讲。

四、批差距

学生作业是衡量平时成绩的一个标志，不同的班级之间，同一个班的不同学生之间，每个学生的不同次作业之间，教师可从中得到学生的信息，调整好教学的方向。师范生的作业要提示，不同班之间力度不一样。如果学生的作业千篇一律，即使都正确，也没有什么意思，何况还有工整认真的尺度，好的数学作业是一首小诗。

五、批评语

什么地方打错号，什么地方打对号，教师应本着实事求是的原则，批改作业即使都正确，教师也要在关键的地方予以标出，不能马虎，作业的等级可以是优、良、中、差，也可以是以优为主，目的是让学生平时成绩计算公正，具体方法如下，每一个班平时作业得优最多学生成绩为一百分，其他的按照得优的减少扣分，这样做，主要是鼓励师范生作业做得认真、明白。教师应提醒学生会看作业的批改。

六、批体会

学生作业是教师评价自己的教学效果，同时也是后续教学的依据。这是两方面的原因和结果，一方面是学生的学习掌握情况的波动，一方面是教师的教学调整，教师应不放弃每一次作业的评价，搞好微调，教师抓住了学生作业，就等于给自己的教学铺上了台阶。

（作者单位　江苏省运河高等师范学校）

● 编辑　谢尾合

顶点的距离均相等，即只要确定了球心所处的准确位置，半径也就迎刃而解了.所以在有些题目中，我们可以采取“先找到满足到部分点距离相等的点集A，再找到满足到剩余点距离相等的点集B，而后取A和B的交集”的办法，就可以找到球心，即各个击破，逐步满足.

例7.如图9所示，平面四边形$ABCD$中，$AB=3$，$AD=4$，$BD=5$，$CD=\sqrt{11}$，$BD\perp CD$，将其沿对角线BD折成四面体$ABCD$，使平面$ABD\perp$平面BCD，若四面体$ABCD$的顶点在同一球面上，则该球的体积为　（　　）

A.4π　　B.4π　　C.25π　　D.36π

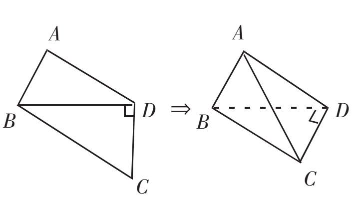

图 9

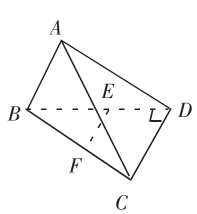

图 10

分析：由几何知识知，到平面图形的各顶点距离相等的点位于过该平面图形的外心垂直于该平面图形的垂线上，而此题恰好有两个直角三角形，故可采用“逐个击破法”求解.

解：由$AB=3$，$AD=4$，$BD=5$，可得$\angle BAD=\frac{\pi}{2}$

如图10所示，在$\triangle BCD$内，取BD的中点E，BC的中点F，

$\therefore EF\parallel CD$

$\because BD\perp CD$，平面$ABD\perp$平面BCD

$\therefore EF\perp$平面ABD

$\therefore$ 直线EF上任意一点到A、B、D三点距离均相等

又在$\mathrm{Rt}\triangle BCD$中，F为斜边BC的中点

$\therefore F$到B、C、D三点距离均相等

$\therefore F$到A、B、C、D四点距离均相等

$\therefore$ 该球的半径$R=\frac{BC}{2}=\frac{\sqrt{CD^2+BD^2}}{2}=\frac{\sqrt{\sqrt{11}^2+5^2}}{2}=3$

$\therefore$ 该球的体积为$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^2\times\frac{4\pi}{3}\times3^3=36\pi$，故选D.

规律小结：

当几何体的各个表面中有部分或全部是可以确定外接圆圆心或半径的平面几何图形（如正三角形、直角三角形等）时，均可采用“逐个击破法”求解.

（作者单位　山西省保德中学）

● 编辑　谢尾合