

江苏省仪征中学 2021-2022 学年度第二学期高三数学学科提升性练习

研制人：李峰 审核人：陈宏强

班级：_____ 姓名：_____ 学号：_____ 时间：2.23 作业时长：30 分钟

1. 已知函数 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且 $f(x+1)$ 为偶函数, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = x^2$. 若直线 $y = a(x-1)$ 与函数 $f(x)$ 的图像在 $[1, 3]$ 内有两个交点, 则实数 a 的取值范围是()

- A. $(0, \frac{1}{4})$ B. $(0, \frac{1}{4}]$ C. $[0, \frac{1}{2}]$ D. $(0, \frac{1}{2})$

2. (多选) 已知 F 为抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点, 过点 F 作直线交 C 于 A, B 两点. 若 AB 中点的横坐标为 $\frac{5}{2}$, 则满足条件的直线条数可能为()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

3. (多选) 已知实数 x, y, z 满足 $e^x + e^y = e^{x+y}$, $e^x + e^y + e^z = e^{x+y+z}$, 其中 e 为自然对数的底数, 则

()

- A. $x+y$ 的最小整数值为 2 B. $x+y$ 的最大整数值为 2
C. z 的最小整数值为 0 D. z 的最大整数值为 0

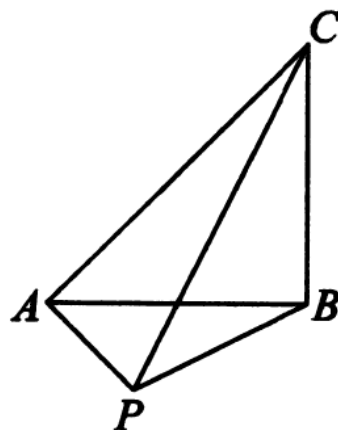
4. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 e , 右焦点为 F , 虚轴的一个端点为 P . 以 F 为圆心, FP 为半径的圆与 C 的右支交于 A, B 两点. 若 A, F, B 三点共线, 则 $e^2 =$ _____.

5. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 圆 O_1 是四边形 $ABCD$ 的内切圆, 圆 O 是四边形 ABC_1D_1 的外接圆. 设 P, Q 分别为圆 O_1 和圆 O 上的动点, 则 PQ 的最大值为_____.

6. 如图, 在平面四边形 $APBC$ 中, $\triangle ABC$ 是以点 B 为直角顶点的等腰直角三角形, $PA = 1, PB = \sqrt{2}$.

(1) 若 $\angle APB = 45^\circ$, 求四边形 $APBC$ 的面积.

(2) 求 PC 长度的最大值.



7. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, A, B 分别为 C 的右顶点和上顶点, 直线 AB 与圆 $E: x^2 + y^2 = \frac{4}{5}$ 相切.

(1) 求椭圆 C 的标准方程.

(2) 设 P 为 C 上的动点, 过点 P 作圆 E 的切线分别交椭圆 C 于 M, N 两点, 求 ΔPMN 面积的最小值.

江苏省仪征中学 2021-2022 学年度第二学期高三数学学科提升性练习

研制人：李峰 审核人：陈宏强

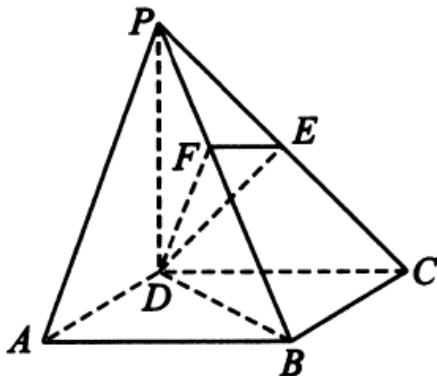
班级：_____ 姓名：_____ 学号：_____ 时间：2.27 作业时长：30 分钟

1. 已知函数 $f(x) = \frac{2^x}{2^x - \sqrt{2}}$, $g(x) = 4^{x^2 - x}$, 若方程 $g(x) = a$ 有两个不同的正根 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 则 $f(x_1)g(x_1) + f(x_2)g(x_2)$ 的取值范围是()

- A. $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ B. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ C. $(\frac{1}{2}, +\infty)$ D. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$

2. (多选) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为正方形, 侧棱 $PD \perp$ 底面 $ABCD$, $AD = PD$, E 是 PC 的中点, $EF \perp PB$ 于点 F . 则下列结论正确的是()

- A. $PB \perp DF$
B. AB 与 DE 所成角的大小为 60°
C. PA 与平面 $ABCD$ 所成角的大小为 45°
D. $BC \perp$ 平面 PBD



3. (多选) 已知双曲线 $E: \frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{n} = 1 (m > 0, n > 0)$ 的右焦点为 $F(c, 0)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$, 过点 $Q(\frac{3\sqrt{5}c}{5}, 0)$ 的直线交双曲线 E 于 M, N 两点. 若线段 MN 的中点 H 的坐标为 $(4, 1)$, 则()

- A. 双曲线 E 的焦距为 $\sqrt{5}$ B. 双曲线 E 的右顶点到直线 MN 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$
C. 双曲线 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ D. $|MF| = |NF|$

4. 已知函数 $f(x) = 2 + 3\cos 4\omega x (\omega > 0)$ 的导函数为 $f'(x)$, 若存在实数 t , 使至少有 6 个不同的实数 $x_i \in [t-1, t+1]$, 且 $f'(x_i) = 0$, 则 ω 的取值范围是_____.

5. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 M, N 分别是棱 A_1D_1, BB_1 上的动点 (可与端点重合). 若 $\triangle DMN$ 在平面 $ABCD$ 、平面 CC_1D_1D 和平面 AA_1D_1D 上的正投影的面积分别为 S_1, S_2, S_3 (当投影为点或线段时, 面积记为 0), 则 $S_1 + S_2 + S_3$ 的最大值为_____.

6. 已知定点 $A(-2,0)$, $B(-\frac{3}{2}, 0)$, $D(2,0)$ 及动点 $E(0,t)$ ($t \neq 0$), 点 G 是直线 AE 上的动点, 且 $DG \perp BE$.

(1) 求点 G 的轨迹 C 的方程.

(2) 过点 $F(-1,0)$ 的直线与曲线 C 交于点 P, Q , 求 $\triangle APQ$ 的面积的最大值.

7. 2020 年 12 月 16 日至 18 日, 中央经济工作会议在北京举行. 会议确定, 2021 年要抓好八项重点任务, 其中第五项是解决好种子和耕地问题. 保障粮食安全, 关键在于落实藏粮于地、藏粮于技战略. 要加强种质资源保护和利用, 加强种子库建设. 要尊重科学、严格监管, 有序推进生物育种产业化应用. 某“种子银行”为保护甲、乙两种珍稀、名贵的农作物种子, 采取“活态保存”的方法, 即对种子实行定期更换和种植. 现该“种子银行”对这两种农作物种子进行更换和种植, 通过实验得出甲农作物的自然出芽率为 p^2 , 乙农作物的自然出芽率为 $1 - p^3$, 其中 $0 < p < 1$.

(1) 任取甲、乙两种农作物的种子各一粒, 设种子的出芽数为随机变量 X , 求 X 的分布列及 $E(X)$.

(2) 将(1)中的 $E(X)$ 取得最大值时的 p^2 的值作为甲农作物种子的自然出芽率. 该“种子银行”决定种植 n 粒甲农作物种子, 种植后没出芽的种子中有 $\frac{4}{5}$ 的种子可进行技术处理, 进行技术处理后的种子出芽的概率为 $\frac{4}{5}$, 其余的不能出芽.

① 求甲农作物的一粒种子最终出芽的概率.

② 若每粒出芽的甲农作物种子可获利 100 元, 不能出芽的每粒亏损 20 元, 则该“种子银行”为了使在种植甲农作物种子中获利期望值不低于 10 万元, 至少要种植甲农作物种子多少粒?