

江苏省仪征中学 2021-2022 学年度第二学期高三数学学科提升性练习

研制人：李峰 审核人：陈宏强

班级：_____ 姓名：_____ 学号：_____ 时间：3.02 作业时长：30 分钟

1. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , M, N 为双曲线一条渐近线上的两点, A 为双曲线的右顶点, 若四边形 MF_1NF_2 为矩形, 且 $\angle MAN = \frac{5\pi}{6}$, 则双曲线 C 的离心率为 ()

A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{7}$ C. $\frac{\sqrt{21}}{3}$ D. $\sqrt{13}$

2. (多选) 如图 1, 在矩形 $ABCD$ 与菱形 $ABEF$ 中, $AB = 2BC = 4$, $\angle ABE = 120^\circ$, M, N 分别是 BF, AC 的中点. 现沿 AB 将菱形 $ABEF$ 折起, 连接 FD, EC , 构成三棱柱 $AFD - BEC$, 如图 2 所示. 若 $DA \perp BF$, 记平面 $AMN \cap$ 平面 $ADF = l$, 则 ()

A. 平面 $ABCD \perp$ 平面 $ABEF$ B. $MN \parallel l$
C. 直线 EF 与平面 ADE 所成的角为 60° D. 四面体 $EABD$ 的外接球的表面积为 148π

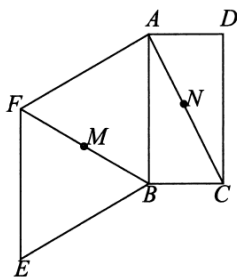


图 1

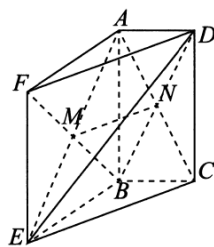


图 2

3. (多选) 已知集合 $R^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n\} (n \geq 1)$, 定义 R^n 上两点 $A(a_1, a_2, \dots, a_n), B(b_1, b_2, \dots, b_n)$, 且 $d(A, B) = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i|$, 则下列说法正确的是 ()
- A. 若 $A(1, 2, -1), B(4, 6, 2)$, 则 $d(A, B) = 10$
- B. 当 $n = 2$ 时, 设 C 为 R^2 上一点, 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $C = 90^\circ$, 则 $[d(A, C)]^2 + [d(C, B)]^2 = [d(A, B)]^2$
- C. 当 $n = 3$ 时, 设 C 为 R^3 上一点, 则 $d(A, C) + d(B, C) \geq d(A, B)$
- D. 若 $A(0, 0, 0), B(4, 4, 4)$, 设 $P(x, y, z)$ 为 R^3 上一点, 其中 $x, y, z \in \mathbf{Z}$, 则满足 $d(A, P) + d(B, P) = d(A, B)$ 的点 P 有 125 个
4. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$, 若直线 $y = kx$ 与函数 $f(x)$ 的图象交于 A, B 两点, 且满足 $|OA| = |OB|$, 其中 O 为坐标原点, 则 k 值的个数为_____.
5. 定义: 记满足下列两个条件的有穷数列 $a_1, a_2, \dots, a_n (n = 2, 3, 4, \dots)$ 为 n 阶“期待数列”. (1) $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 0$; (2) $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n| = 1$. 试写出一个 3 阶“期待数列”; 若 2021 阶“期待数列” $\{a_n\}$ 是递增的等差数列, 则 $a_{2021} =$ _____.

6. 已知函数 $f(x) = ax + \frac{\ln x}{x}$.

(1) 若 $a = -1$, 求函数 $f(x)$ 的极值点;

(2) 若函数 $f(x)$ 存在两个不同的零点 x_1, x_2 , 证明: $x_1 x_2 > e$.

7. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 1)$ 上的点 $P(x_0, 1)$ 到抛物线焦点 F 的距离为 $\frac{5}{4}$.

(1) 求抛物线 C 的方程;

(2) 若点 $E(t, 4)$ 在抛物线 C 上, 过点 $D(0, 2)$ 的直线 l 与抛物线 C 交于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) (y_1 > 0, y_2 > 0)$ 两点, 点 H 与点 A 关于 x 轴对称, 直线 AH 分别与直线 OE, OB 交于点 M, N (O 为坐标原点), 求证: $S_{\triangle AMD} = S_{\triangle OMN}$.

江苏省仪征中学 2021-2022 学年度第二学期高三数学学科提升性练习

研制人：李峰 审核人：陈宏强

班级：_____ 姓名：_____ 学号：_____ 时间：3.06 作业时长：30 分钟

1. 已知曲线 $y = \ln x$ 在点 $N(e^t, t)$ 处的切线为 l , 则当 $M(-1, t)$ 到 l 的距离最大时, 以线段 MN 为直径的圆的方程为 ()

A. $(x-1)^2 + y^2 = 1$ B. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$ C. $x^2 + y^2 = 2$ D. $x^2 + y^2 = 1$

2. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 若满足: (1) $f(x)$ 在 D 内是单调函数; (2) 存在区间 $[a, b]$, 使 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的值域为 $\left[\frac{k}{b}, \frac{k}{a}\right]$, 那么就称函数 $f(x)$ 为“ D 上的 k 类成功函数”. 已知函数 $f(x) = 3 - x^2$ 是“(0, +∞) 上的 k 类成功函数”, 则实数 k 的取值范围为 ()

A. (0, 2] B. [0, 2] C. (0, 2)
D. (-2, 2)

3. (多选) 若 $(1+2x) + (1+2x)^2 + \cdots + (1+2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ ($n \in \mathbf{N}^*$), $a_1 = 42$, 则下列结论中正确的是 ()

A. $a_0 = 6$ B. $a_{n-1} = 192$ C. $\sum_{i=0}^n a_i = 1092$
D. $\sum_{i=1}^n (-1)^i a_i = -6$

4. (多选) 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 下列结论正确的是 ()

A. 若 $BB_1 = BC$, 则对于棱 AB 上任意给定的点 P , 都有 $D_1P \perp B_1C$
B. 若长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长一定, E, F 均在线段 A_1C_1 上, 且 EF 的长为定值, 则四面体 B_1CFE 的体积为定值
C. 棱 AB 上一定存在点 P , 使得 $PC \perp D_1P$
D. 设 AC_1 与平面 $ABCD$ 、平面 ABB_1A_1 、平面 ADD_1A_1 所成的角分别为 α, β, γ , 则 $(\cos \alpha + \cos \beta) \cdot \cos \gamma \leq \sqrt{2}$

5. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{1}{2}$, F_1, F_2 分别是椭圆的左、右焦点, c 为半焦距, A 是椭圆上的一个动点. 若 $\triangle AF_1F_2$ 的内切圆半径的最大值为 1, 则 $\log_b(a+c) =$ _____.

6. 已知关于 x 的不等式 $e^x \geq x^4 + x^3(1 + a \ln x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 则实数 a 的取值范围是 _____.

7. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左顶点为 A , 右焦点为 F , 离心率 $e = 2$.

(1) 设点 F 和点 A 到某一条渐近线的距离分别为 d_1 和 d_2 , 求 $\frac{d_1}{d_2}$ 的值.

(2) 过点 F 且不与 x 轴重合的直线 l 交双曲线 C 于 M, N 两点,

① 已知点 M 在第一象限, 设直线 MF 和直线 MA 的倾斜角分别为 α, β , 若 $\beta = \frac{\pi}{6}$, 求 α ;

② 求 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{NA}$.