

利用构造法求数列通项公式的常见题型与解法分析

——与高考链接

叶景辉 郭振明

(惠州学院 数学系, 广东 惠州 516007)

摘 要: 数列是高考的热点内容,也是进入大学学习高等数学的基本工具。纵观历年全国各地高考数学试题,几乎都会涉及数列的题型,而这类题型一般都会要求考生求出数列的通项公式。在近几年的高考数学试题中,命题趋势逐渐趋向利用“构造法”求数列的通项公式。如何针对这种题型获得快速解决问题的技巧,这需要考生在平日备考中掌握利用构造法求数列通项公式的常见题型与解法。

关键词: 数列 通项公式 构造法 常见题型 解法分析

一、题型:形如“ $a_{n+1}=pa_n+q$ ”的递推关系

求解策略: 由于递推关系 $a_{n+1}=pa_n+q$ 不是普通的等差、等比数列关系,我们可以构造新数列: $a_{n+1}+x=p(a_n+x)$,根据系数关系有: $(p-1)x=q$,则可求出 x ,所以数列 $\{a_n+x\}$ 是以首项为 a_1+x ,公比为 p 的等比数列,于是有 $a_n+x=(a_1+x)p^{n-1}$,所以 $a_n=(a_1+x)p^{n-1}-x$ 。

大课题选择的标准是从简单到复杂,内容则是循序渐进地完成“考核要求”,以锉削为红线串接起钳工技能的要求,辅助以小课题的训练,提高学生的技能水平。通过实验,我们认为这种办法可以有效地提高学生的技能水平,学生考核的结果也说明了这一点,机械班高考学生平均分为216.6,超深阳职技校(戴埠)校区13分。下表为江苏前五名的机械专业技能排名。

学校	专业技能	名次
溧中心	216.6	2
溧阳职技校(戴埠)	203.6	4
海门职教中心	224.6	1
如皋一职高	191.8	5
如皋职教中心	208.6	3
平均	207.6	

五、指导认真、抓细抓实技能教学工作

我们要求指导教师对于学生技能训练工作认真抓细抓实,不放过学生的一个微小错误点,重视学生在训练中的突出点。

仔细分析对口单招试卷的构成,我们发现整个考核内容以对口单招的技能标准为蓝本,主要由以下几个部分组成:(以机械为例)

1. 尺寸(35%)
2. 形位公差(5%)
3. 表面粗糙度(5%)
4. 孔加工(25%)
5. 配合加工(30%)

通过分析,我们找到容易拿分的重点项目加以重点训练,如尺寸分,这是重点,同时也是学生“锉削技能”的基础,同是尺寸也是其他项目的基础,如表面粗糙度、配合,只有抓住“尺寸”项目才可以对其他项目兼顾。

对于孔加工,我们认为,这是拿分的主项目,绝大部分同学在这一项目上必须也应该拿大分,因为孔加工只要做好几万数据

例题: 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+1$,求数列 $\{a_n\}$ 通项公式。

解析: 结合题型的求解策略,构造新数列: $a_{n+1}+x=\frac{2}{3}(a_n+x)$,即 $a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n-\frac{1}{3}x$,利用待定系数法得: $-\frac{1}{3}x=1$,即 $x=-3$,所以数列 $\{a_n-3\}$ 是以首项为 $a_1-3=2$,公比为 $\frac{2}{3}$ 的等比数列,即有 $a_n-3=(a_1-3)(\frac{2}{3})^{n-1}$,所以 $a_n=3-2\cdot(\frac{2}{3})^{n-1}$ 。

二、题型变式一:形如“ $a_{n+1}=pa_n+q^n$ ”的递推关系

求解策略: 设想构造新数列: $a_{n+1}+xq^{n+1}=p(a_n+xq^n)$,根据系

个方面就可以得大分,如孔的精度、孔的表面粗糙度等,唯一难拿分的项目是孔位置精度,这个分不太好拿,运气分占了太多。所以我们的训练就以此为例,要求学生每个训练工件基本上孔精度与表面粗糙度分都拿,这样保证正式考试才可以得高分。

总体这样算下来,该拿的分都拿到了,得分的高低就看学生的基本功了,基本功好的同学就得高分。如机械班的谢超(240分)、高立枫(238分)等同学,基本功扎实,得分自然就高。

六、考前精心准备,考试得心应手

考试是平时练习水平的体现,只有平时抓好基础训练,做好各项工作才可以在考试中考出好成绩,但考前两三天的准备工作也是必不可少,做好考前的准备工作,可以为考试增添信心,发挥出学生最好的状态。

考前的准备工作从以下几个方面来做。

1. 工量具的准备:所有的刀必须是试用过的,不一定是最新的,但一定是要用过的,最得心应手的,锉刀分粗、中、细三种规格精心准备,粗锉刀切削量要大,精锉刀切削量要小,切削面要光;钻头要试钻,一定要保证孔径与公称直径相符合;铰刀要修磨,铰出的孔不但直径要用塞规测量,孔壁要光,表面粗糙度为1.6,不能有拉痕;锯条最好选用高速钢,让学生试锯出光滑的表面、标准的尺寸。量具要校准,游标卡、千分尺也要量块校准,不能有误差。

2. 切削液的准备:切削液要分攻丝、铰孔、钻孔三种,攻丝用32#机油即可,铰孔、钻孔用皂化油配制,浓度要适当。

3. 各种辅助东西的准备:主要包括钳口垫板、工作服的准备等。

4. 临场心理的辅导:树立学生必胜的信念,全力以赴,同时在考前一两天调整好学生的状态,将学生各自的生物钟调整到考试时间内最好的状态,考虑各种临场因素,如考场的钳台、钻床的使用安排,等等。

总之,对口单招要取得一个好成绩是个综合性的工程,缺少哪一方面都将影响学生的发挥。只有做到方方面面考虑周到才能使考生考出好的成绩。同时对口单招的技能训练又是一个系统工程,不但要教师工作认真,全心全意,而且教学管理部门应相应地提出改进方法,只有齐心合力才可以让学生考出好的成绩。

我和新课改一起成长

陈亦莲

(吴江市松陵第一中学, 江苏 吴江 215200)

摘要: 教师应改变老的备课方式, 改变以往的课堂教学方法, 把课堂真正还给学生, 注意进行课后反思。

关键词: 新课改 备课方式 教学方法 课后反思

新课程已走进校园, 走进师生的生活。新课程强调教学过程是师生交往、共同发展的互动过程。新课程呼唤新观念, 没有新观念就没有新课程。在学习和教学中, 我意识到新课改表面上是改变教材, 实质上就是改造我们自身, 我们每一个人都要积极地从新课程中寻找“自我”寻找新课程对“自我”的意义, 并主动地把“自我”融入到新课程中, 敢于承担责任, 善于

解决问题。只有这样我们才能和新课程共同成长。新课程下的课堂教学怎样才能真正把课堂还给学生呢? 下面我就把自己在课堂教学改革中的几点认识和广大同仁切磋。

一、改变老的备课方式

以前备课是按照“导入—讲授—巩固—小结—作业”的教学思路设计教学过程, 教师讲、学生听。学生是被动接受知识的容器, 这样的课堂没有生气, 就像一潭死水。我在备课前认真学习课标, 认真分析教材, 挖掘教材, 把新课标的理念融入教学设计之中。备课时以学生为中心、主体。注意做到变换角度思考(把自己放在学生的认知水平上设计问题)。

数关系有: $(p-q)x=1$, 则可求出 x , 即数列 $\{a_n+xq^n\}$ 以首项为 a_1+xq , 公比为 p 的等比数列, 即有 $a_n+xq^n=(a_1+x)p^{n-1}$, 所以 $a_n=(a_1+xq)p^{n-1}-xq^n$ 。

例题: 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_{n+1}=3a_n+2^n$, 求数列 $\{a_n\}$ 通项公式。

解析: 结合变式一的求解策略, 构造新数列: $a_{n+1}+x \cdot 2^{n+1}=3(a_n+x \cdot 2^n)$, 于是有 $a_{n+1}=3a_n+x \cdot 2^n$, 利用待定系数法可得: $x=1$, 即数列 $\{a_n+2^n\}$ 是以首项为 $a_1+2=3$, 公比为 3 的等比数列, 于是有 $a_n+2^n=(a_1+2) \cdot 3^{n-1}$, 所以 $a_n=3^n-2^n$ 。

三、题型变式二: 形如“ $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$ ”的递推关系

求解策略: 设想构造新数列: $a_{n+2}+xa_{n+1}=y(a_{n+1}+xa_n)$, 根据系数关系则有: $y-x=p, xy=q$, 则可求出和, 即数列 $\{a_{n+1}+xa_n\}$ 是以首项 a_2+xa_1 , 公比为 y 的等比数列, 于是有 $a_n+xa_{n-1}=(a_2+xa_1)y^{n-2}$, 这种题型需要根据 x, y 的具体值才可以求出数列的通项。

例题: 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2, a_2=3, a_{n+2}=\frac{2}{3}a_{n+1}+\frac{1}{3}a_n$, 求数列 $\{a_n\}$ 通项公式。

解析: 结合变式二的求解策略, 设想构造新数列: $a_{n+2}+xa_{n+1}=y(a_{n+1}+xa_n)$, 即 $a_{n+2}=(y-x)a_{n+1}+xya_n$, 利用待定系数法可得: $y-x=\frac{2}{3}, xy=\frac{1}{3}$, 即 $x=-1, y=-\frac{1}{3}$ (或 $x=\frac{1}{3}, y=1$, 结果一样)。于是 $a_{n+2}-a_{n+1}=-\frac{1}{3}(a_{n+1}-a_n)$, 即数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是以首项 $a_2-a_1=1$, 公比为 $-\frac{1}{3}$ 的等比数列, 即 $a_{n+1}-a_n=(-\frac{1}{3})^{n-1}$, 由 n 的不同取值得出不

同表达式, 利用叠加法有 $a_n-a_{n-1}+a_{n-1}-a_{n-2}+\cdots+a_2-a_1=(-\frac{1}{3})^{n-2}+(-\frac{1}{3})^{n-3}+\cdots+(-\frac{1}{3})^0$, 消去中间一些项可得: $a_n-a_1=\frac{3}{4}[1-(-\frac{1}{3})^{n-1}]$, 所以 $a_n=\frac{11}{4}-\frac{3}{4}(-\frac{1}{3})^{n-1}$ 。

四、题型变式三: 形如“ $a_{n+1}=k\sqrt{a_n}$ ($a_{n+1}=k \cdot a_n^{\frac{1}{2}}$)”的递推关系

求解策略: 由递推关系 $a_{n+1}=k \cdot a_n^{\frac{1}{2}}$ 可知, 等式的右边含有指数万方数据

数(分数), 一般指数是分数的形式, 可利用对数函数的性质,

两边取以 k 为底的对数, 即: $\log_k a_{n+1}=\log_k(k \cdot a_n^{\frac{1}{2}})$, 得: $\log_k a_{n+1}=1+\frac{1}{2}\log_k a_n$, 这种情形可以构造新数列: $\log_k a_{n+1}+x=\frac{1}{2}(\log_k a_n+x)$,

根据系数关系有: $-\frac{1}{2}x=1$, 得 $x=-2$, 即数列 $\{\log_k a_n-2\}$ 以首项为

$\log_k a_1-2$, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列, 于是 $\log_k a_n-2=(\log_k a_1-2)(\frac{1}{2})^{n-1}$,

所以 $a_n=k^{\log_k a_1-2+(\frac{1}{2})^{n-1}}$ 。

例题: 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_{n+1}=2\sqrt{a_n}$, 求数列 $\{a_n\}$ 通项公式。

解析: 递推关系 $a_{n+1}=2\sqrt{a_n}=2 \cdot a_n^{\frac{1}{2}}$, 结合变式三的求解策

略, 等式两边同时取以 2 为底的对数, 即 $\log_2 a_{n+1}=\log_2(2 \cdot a_n^{\frac{1}{2}})$,

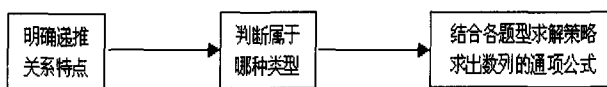
即 $\log_2 a_{n+1}=\frac{1}{2}\log_2 a_n+1$, 这种情形可以构造新数列: $\log_2 a_{n+1}+x=$

$\frac{1}{2}(\log_2 a_n+x)$, 即 $\log_2 a_{n+1}=\frac{1}{2}\log_2 a_n-\frac{1}{2}x$, 利用待定系数法得: $-\frac{1}{2}x=1$, 即 $x=-2$, 所以数列 $\{\log_2 a_n-2\}$ 是以首项为 $\log_2 a_1-2=-1$,

公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列, 于是有 $\log_2 a_n-2=(\log_2 a_1-2)(\frac{1}{2})^{n-1}$, 所

以 $a_n=2^{2-(\frac{1}{2})^{n-1}}$ 。

小结: 解答这类题型的一般步骤为:



以上主要列举了四种利用“构造法”求数列通项公式的常见题型及其解法分析, 每种题型各具特点, 同时彼此之间又相互联系。根据数列求通项公式的题型, 考生也可以选择利用“数学归纳法”进行求解。在备考过程中, 考生多掌握一种解题方法, 这不仅可以发散个人的思维, 而且可以提高自身的应试能力。通过这些总结分析, 希望能对考生有所帮助, 同时也祝愿各位考生在考试中取得好成绩。