

2022 届高三数学五月调研测试热身训练一

班级_____姓名_____学号_____得分_____



一、单选题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共计 25 分。每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的。

- 设 D 为 $\triangle ABC$ 的边 BC 的延长线上一点， $BC = 3CD$ ，则 ()
 - $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$
 - $\overrightarrow{AD} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
 - $\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$
 - $\overrightarrow{AD} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
- 已知直线 $l_1: 3x + y - 6 = 0$ 与圆心为 $M(0, 1)$ ，半径为 $\sqrt{5}$ 的圆相交于 A, B 两点，另一直线 $l_2: 2kx + 2y - 3k - 3 = 0$ 与圆 M 交于 C, D 两点，则四边形 $ACBD$ 面积的最大值为 ()
 - $10\sqrt{2}$
 - $5\sqrt{2}$
 - $5(\sqrt{2} + 1)$
 - $5(\sqrt{2} - 1)$
- 一个正三棱锥(底面积是正三角形，顶点在底面上的射影为底面三角形的中心)的四个顶点都在半径为 1 的球面上，球心在三棱锥的底面所在平面上，则该正三棱锥的体积是 ()
 - $\frac{3\sqrt{3}}{4}$
 - $\frac{\sqrt{3}}{3}$
 - $\frac{\sqrt{3}}{4}$
 - $\frac{\sqrt{3}}{12}$
- 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，过 F_1 作垂直 x 轴的直线交椭圆 E 于 A, B 两点，点 A 在 x 轴上方。若 $|AB| = 3$ ， $\triangle ABF_2$ 的内切圆的面积为 $\frac{9\pi}{16}$ ，则直线 AF_2 的方程是 ()
 - $3x + 2y - 3 = 0$
 - $2x + 3y - 2 = 0$
 - $4x + 3y - 4 = 0$
 - $3x + 4y - 3 = 0$
- 已知 $f(x) = \ln x - \frac{x}{4} + \frac{3}{4x}$ ， $g(x) = -x^2 - 2ax + 4$ ，若对 $\forall x_1 \in (0, 2]$ ， $\exists x_2 \in [1, 2]$ ，使得 $f(x_1) \geq g(x_2)$ 成立，则 a 的取值范围是 ()
 - $\left[-\frac{1}{8}, +\infty\right)$
 - $\left[\frac{25 - 8\ln 2}{16}, +\infty\right)$
 - $\left[-\frac{1}{8}, \frac{5}{4}\right]$
 - $\left(-\infty, \frac{5}{4}\right]$

二、多选题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共计 15 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

- 函数 $f(x)$ 的定义域为 R ，且 $f(x+1)$ 与 $f(x+2)$ 都为奇函数，则 ()
 - $f(x)$ 为奇函数
 - $f(x)$ 为周期函数
 - $f(x+3)$ 为奇函数
 - $f(x+4)$ 为偶函数
- 设 $\{a_n\} (n \in N^*)$ 是等差数列， d 是其公差， S_n 是其前 n 项和。若 $S_5 < S_6, S_6 = S_7 > S_8$ ，则下列结论正确的是 ()
 - $d < 0$
 - $a_7 = 0$
 - $S_9 > S_5$
 - S_6 与 S_7 均为 S_n 的最大值
- 声音是由物体震动产生的波，其中包含着正弦函数。纯音的数学模型是函数 $y = A \sin \omega t$ ，我们听到的声音是由纯音合成的，称之为复合音。若一个复合音的数学模型是函数 $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x$ ，则下列结论正确的是 ()
 - 2π 是 $f(x)$ 的一个周期
 - $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上有 3 个零点
 - $f(x)$ 的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$
 - $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上是增函数

三、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.请把答案填写在答题卡相应的位置上.

9. 若 6 把椅子摆成一排, 3 人随机就座, 则有且仅有两人相邻的坐法有_____种(用数字填空)
10. 在 $\left(2x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式中, x^2 的系数为_____.
11. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 且 $a^2 = b^2 + c^2 - \frac{\sqrt{7}}{2}bc$, $\triangle ABC$ 的面积为 S , $a = 3$, 则 $S + 6 \cos B \cos C$ 的最大值为_____.
12. 已知 $f(x) = \begin{cases} \ln x, & 0 < x \leq 2e \\ f(4e - x), & 2e < x < 4e \end{cases}$, 若方程 $f(x) - mx = 0$ 有 2 个不同的实根, 则实数 m 的取值范围是_____.(结果用区间表示)

四、解答题:本大题共 4 小题,共 46 分.请在答题卡指定区域内作答,解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

13. 某机器生产商, 对一次性购买两台机器的客户推出两种超过质保期后两年内的延保维修方案:
方案一: 交纳延保金 6000 元, 在延保的两年内可免费维修 2 次, 超过 2 次每次收取维修费 1500 元;
方案二: 交纳延保金 7740 元, 在延保的两年内可免费维修 4 次, 超过 4 次每次收取维修费 a 元.
某工厂准备一次性购买两台这种机器, 现需决策在购买机器时应购买哪种延保方案, 为此搜集并整理了 100 台这种机器超过质保期后延保两年内维修的次数, 统计得下表:

维修次数	0	1	2	3
机器台数	20	10	40	30

- 以上 100 台机器维修次数的频率代替一台机器维修次数发生的概率, 记 X 表示这两台机器超过质保期后延保两年内共需维修的次数.
- (1) 求 X 的分布列;
- (2) 以所需延保金与维修费用之和的期望值为决策依据, 该工厂选择哪种延保方案更合算?

14. 在 $\triangle ABC$ 中, $3\sin A = 2\sin B$, $\tan C = \sqrt{35}$.

(1) 求 $\cos 2C$;

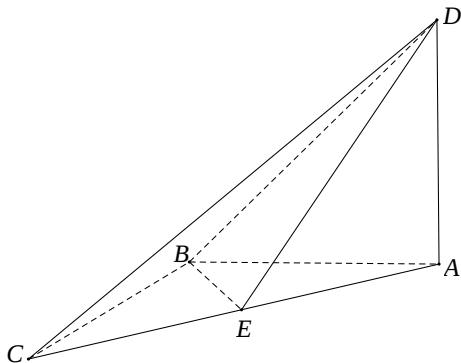
(2) 若 $AC - BC = 1$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

15. 如图所示, 在四面体 $ABCD$ 中, $AD \perp AB$, 平面 $ABD \perp$ 平面 ABC , $AB = BC = \frac{\sqrt{2}}{2}AC$, 且

$$AD + BC = 4.$$

(1) 证明: $BC \perp$ 平面 ABD ;

(2) 设 E 为棱 AC 的中点, 当四面体 $ABCD$ 的体积取得最大值时, 求二面角 $C - BD - E$ 的余弦值.



16. 已知椭圆 $O: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点分别为 A, B , 点 P 在椭圆 O 上运动, 若 $\triangle PAB$ 面积的最大值为 $2\sqrt{3}$, 椭圆 O 的离心率为 $\frac{1}{2}$.

(1) 求椭圆 O 的标准方程;

(2) 过 B 点作圆 $E: x^2 + (y - 2)^2 = r^2, (0 < r < 2)$ 的两条切线, 分别与椭圆 O 交于两点 C, D (异于点 B), 当 r 变化时, 直线 CD 是否恒过某定点? 若是, 求出该定点坐标, 若不是, 请说明理由.

2022 届高三数学五月调研测试热身训练一答案

一、单选： 1. C 2. B 3. C 4. D 5. A

二、多选题： 6. ABC 7. ABD 8. ABC

三、填空题： 9 . 72 10 . 80 11 . 6 12 . $(-\infty, \frac{1}{e})$

四、解答题：

13. (1) x 所有可能的取值为 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,

$$P(X=0) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}, \quad P(X=1) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{5} \times 2 = \frac{1}{25},$$

$$P(X=2) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} + \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} \times 2 = \frac{17}{100}, \quad P(X=3) = \frac{1}{10} \times \frac{2}{5} \times 2 + \frac{1}{5} \times \frac{3}{10} \times 2 = \frac{1}{5},$$

$$P(X=4) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{10} \times 2 = \frac{11}{50}, \quad P(X=5) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{10} \times 2 = \frac{6}{25}, \quad P(X=6) = \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{9}{100},$$

$\therefore X$ 的分布列为

X	0	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{17}{100}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{11}{50}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{9}{100}$

(2) 选择延保方案一，所需费用 Y_1 元的分布列为：

Y_1	6000	7500	9000	10500	12000
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{11}{50}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{9}{100}$

$$E(Y_1) = \frac{1}{4} \times 6000 + \frac{1}{5} \times 7500 + \frac{11}{50} \times 9000 + \frac{6}{25} \times 10500 + \frac{9}{100} \times 12000 = 8580 \text{ (元)}$$

选择延保方案二，所需费用 Y_2 元的分布列为：

Y_2	7740	$7740 + a$	$7740 + 2a$
P	$\frac{67}{100}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{9}{100}$

$$E(Y_2) = \frac{67}{100} \times 7740 + \frac{6}{25} \times (7740 + a) + \frac{9}{100} \times (7740 + 2a) = 7740 + \frac{21a}{50} \text{ (元)}$$

$$\therefore E(Y_1) - E(Y_2) = 840 - \frac{21a}{50},$$

当 $E(Y_1) - E(Y_2) = 840 - \frac{21a}{50} > 0$ ，即 $0 < a < 2000$ 时，选择方案二，

当 $E(Y_1) - E(Y_2) = 840 - \frac{21a}{50} = 0$ ，即 $a = 2000$ 时，选择方案一，方案二均可，

当 $E(Y_1) - E(Y_2) = 840 - \frac{21a}{50} < 0$ ，即 $a > 2000$ 时，选择方案一。

14. (1) $\because \tan C = \sqrt{35}$, $\therefore \cos C = \frac{1}{6}$, $\therefore \cos 2C = 2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 - 1 = -\frac{17}{18}$.

(2) 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c .

$$\because 3 \sin A = 2 \sin B, \therefore 3a = 2b,$$

$$\because AC - BC = b - a = 1, \therefore a = 2, b = 3.$$

$$\text{由余弦定理可得 } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 13 - 2 = 11,$$

$$\text{则 } c = \sqrt{11}, \triangle ABC \text{ 的周长为 } 5 + \sqrt{11}.$$

15. (1) 证明: 因为 $AD \perp AB$, 平面 $ABD \perp$ 平面 ABC ,
平面 $ABD \cap$ 平面 $ABC = AB$, $AD \subset$ 平面 ABD , 所以 $AD \perp$ 平面 ABC ,
因为 $BC \subset$ 平面 ABC , 所以 $AD \perp BC$.

$$\text{因为 } AB = BC = \frac{\sqrt{2}}{2} AC, \text{ 所以 } AB^2 + BC^2 = AC^2, \text{ 所以 } AB \perp BC,$$

因为 $AD \cap AB = A$, 所以 $BC \perp$ 平面 ABD .

(2) 解: 设 $AD = x (0 < x < 4)$, 则 $AB = BC = 4 - x$,

$$\text{四面体 } ABCD \text{ 的体积 } V = f(x) = \frac{1}{3} x \times \frac{1}{2} (4 - x)^2 = \frac{1}{6} (x^3 - 8x^2 + 16x) (0 < x < 4).$$

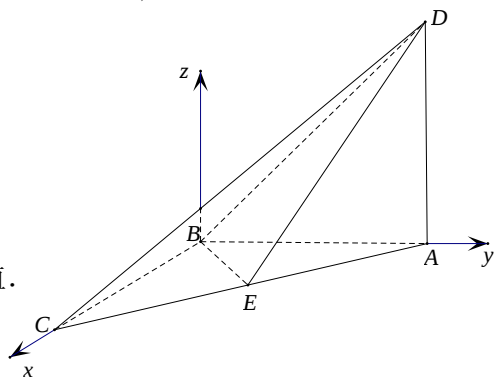
$$f'(x) = \frac{1}{6} (3x^2 - 16x + 16) = \frac{1}{6} (x - 4)(3x - 4),$$

当 $0 < x < \frac{4}{3}$ 时, $f'(x) > 0$, $V = f(x)$ 单调递增;

当 $\frac{4}{3} < x < 4$ 时, $f'(x) < 0$, $V = f(x)$ 单调递减.

故当 $AD = x = \frac{4}{3}$ 时, 四面体 $ABCD$ 的体积取得最大值.

以 B 为坐标原点, 建立空间直角坐标系 $B - xyz$,



$$\text{则 } B(0, 0, 0), A\left(0, \frac{8}{3}, 0\right), C\left(\frac{8}{3}, 0, 0\right), D\left(0, \frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right), E\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, 0\right).$$

$$\text{设平面 } BCD \text{ 的法向量为 } \mathbf{n} = (x, y, z), \text{ 则 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} \frac{8}{3}x = 0 \\ \frac{8}{3}y + \frac{4}{3}z = 0 \end{cases},$$

令 $z = -2$, 得 $\mathbf{n} = (0, 1, -2)$,

同理可得平面 BDE 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (1, -1, 2)$,

$$\text{则 } \cos \theta = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{-5}{\sqrt{5} \times \sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{30}}{6}.$$

由图可知, 二面角 $C - BD - E$ 为锐角, 故二面角 $C - BD - E$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{30}}{6}$.

16. (1) 由题可知当点 P 在椭圆 O 的上顶点时, $S_{\triangle PAB}$ 最大,

$$\text{此时 } S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} \times 2ab = ab = 2\sqrt{3}, \therefore \begin{cases} ab = 2\sqrt{3} \\ \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \\ a^2 - b^2 = c^2 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = \sqrt{3}, c = 1,$$

$$\therefore \text{椭圆 } O \text{ 的标准方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

(2) 设过点 $B(2,0)$ 与圆 E 相切的直线方程为 $y = k(x-2)$, 即 $kx - y - 2k = 0$,

$$\therefore \text{直线与圆 } E: x^2 + (y-2)^2 = r^2 \text{ 相切, } \therefore d = \frac{|-2-2k|}{\sqrt{k^2+1}} = r,$$

$$\text{即得 } (4-r^2)k^2 + 8k + 4-r^2 = 0.$$

设两切线的斜率分别为 $k_1, k_2 (k_1 \neq k_2)$, 则 $k_1 k_2 = 1$,

$$\text{设 } C(x_1, y_1), D(x_2, y_2), \text{ 由 } \begin{cases} y = k_1(x-2) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases} \Rightarrow (3+4k_1^2)x^2 - 16k_1^2x + 16k_1^2 - 12 = 0,$$

$$\therefore 2x_1 = \frac{16k_1^2 - 12}{3+4k_1^2}, \text{ 即 } x_1 = \frac{8k_1^2 - 6}{3+4k_1^2}, \therefore y_1 = \frac{-12k_1}{3+4k_1^2};$$

$$\text{同理: } x_2 = \frac{8k_2^2 - 6}{3+4k_2^2} = \frac{8-6k_1^2}{4+3k_1^2}, y_2 = \frac{-12k_2}{3+4k_2^2} = \frac{-12k_1}{4+3k_1^2};$$

$$\therefore K_{CD} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{-12k_1}{4+3k_1^2} - \frac{-12k_1}{3+4k_1^2}}{\frac{8-6k_1^2}{4+3k_1^2} - \frac{8k_1^2-6}{3+4k_1^2}} = \frac{k_1}{4(k_1^2+1)},$$

$$\therefore \text{直线 } CD \text{ 的方程为 } y + \frac{12k_1}{3+4k_1^2} = \frac{k_1}{4(k_1^2+1)} \left(x - \frac{8k_1^2-6}{3+4k_1^2} \right).$$

$$\text{整理得 } y = \frac{k_1}{4(k_1^2+1)}x - \frac{7k_1}{2(k_1^2+1)} = \frac{k_1}{4(k_1^2+1)}(x-14),$$

$\therefore$ 直线 CD 恒过定点 $(14,0)$.