浅谈“辅助数列法”求数列的通项公式

◆陈树礼

（河北省承德县六沟高中）

【摘要】本文介绍了用“辅助数列法”求数列的通项公式。求数列的通项公式是高考中常见题型，通过给出一道题的变式训练，归纳总结求通项公式的“辅助数列法”。

【关键词】数列通项公式　构造法　变式

求数列的通项公式是高考中常见题型，本文通过给出一道题的变式训练，归纳总结求通项公式的“辅助数列法”。

例　已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=5$，且当 $n\geq 2, n\in N^*$ 时，$a_n=2a_{n-1}$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

分析：给出了相邻两项的比例关系，符合等比数列的定义，用“定义法”求解。

解：$\because a_1=5$，$a_n=2a_{n-1}$，$n\geq 2, n\in N^*$ $\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 为等比数列。

故它的通项公式为 $a_n=5\cdot 2^{n-1}$。

【变式1】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=5$，且当 $n\geq 2, n\in N^*$ 时，$a_n=2a_{n-1}+1$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

分析：给出了相邻两项的线性关系，宜用“构造辅助等比数列法”求解。

解：设 $a_n+r=2(a_{n-1}+r)$，则 $a_n=2a_{n-1}+r$，$\therefore r=1.\therefore a_n+1=2(a_{n-1}+1)$

$\therefore$ 数列 $\{a_n+1\}$ 的首项为 $a_1+1=6$，公比为 2，$\therefore a_n+1=6\cdot 2^{n-1}, \therefore a_n=6\cdot 2^{n-1}-1$

【变式2】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=5$，且当 $n\geq 2, n\in N^*$ 时，$a_n=2a_{n-1}+2^n$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

分析：若将递推公式中的 2^n 变为 1，就可用“构造辅助等差数列数列法”求解。

解：由 $a_n=2a_{n-1}+2^n$ 得 $\frac{a_n}{2^n}=\frac{2a_{n-1}}{2^n}+1$，即 $\frac{a_n}{2^n}=\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}+1$，

设 $\frac{a_n}{2^n}=b_n$，则 $b_n=b_{n-1}+1.\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是以 $b_1=\frac{5}{2}$ 为首项，1 为公差的等差数列。$\therefore b_n=\frac{5}{2}+(n-1)\cdot 1=n+\frac{3}{2}, \therefore a_n=2^n\cdot(n+\frac{3}{2})$.

【变式3】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=5$，且当 $n\geq 2, n\in N^*$ 时，$a_n=3a_{n-1}+2^n$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

分析：依据变式 2，可用“构造辅助等比数列数列法”求解。

解：由 $a_n=3a_{n-1}+2^n$ 得

即 $\frac{a_n}{2^n}=\frac{3}{2}\cdot\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}+1.\frac{a_n}{2^n}=\frac{3a_{n-1}}{2^n}+1$

设 $b_n=\frac{a_n}{2^n}$，则 $b_n=\frac{3}{2}b_{n-1}+1$，设 $b_n+r=\frac{3}{2}(b_{n-1}+r)$（$r$ 为常数）。

则 $b_n=\frac{3}{2}b_{n-1}+\frac{r}{2}, \therefore r=2.$ 于是数列 $\{b_n+2\}$ 是首项为 $b_1+2=\frac{a_1}{2}+2=\frac{9}{2}$，$\frac{3}{2}$ 为公比的等比数列。$\therefore b_n+2=\frac{9}{2}(\frac{3}{2})^{n-1}.\therefore a_n=2^n\left[\frac{7}{2}(\frac{3}{2})^{n-1}-2\right]=9\cdot 3^{n-1}-2^{n+1}$。

【变式4】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=5$，且当 $n\geq 2, n\in N^*$ 时，$a_n=2a_{n-1}+2^n-1$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

分析：构造新的等差数列求解。

解：设 $\frac{a_n+\lambda}{2^n}=\frac{a_{n-1}+\lambda}{2^{n-1}}+\mu$。则 $a_n+\lambda=2(a_{n-1}+\lambda)+2^n\mu$。$\therefore \lambda=-1, \mu=1.\therefore \frac{a_n-1}{2^n}=\frac{a_{n-1}-1}{2^{n-1}}+1$　$\therefore$ 数列 $\{\frac{a_n-1}{2^n}\}$ 是首项为 $\frac{a_1-1}{2}=2$，公差为 1 的等差数列。$\therefore \frac{a_n-1}{2^n}=2+(n-1)=n+1$。$\therefore a_n=2^n(n+1)+1$。

【变式5】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=5$，且当 $n\geq 2, n\in N^*$ 时，$a_n=3a_{n-1}+2^n-1$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

分析：构造新的等比数列求解。

解：设 $\frac{a_n+\lambda}{2^n}=\frac{3}{2}\cdot\frac{a_{n-1}+\lambda}{2^{n-1}}(\lambda,\mu\in R)$，则 $a_n=3a_n+2^n\mu+2\lambda.\therefore \mu=1, \lambda=-\frac{1}{2}$。

$\therefore \frac{a_n-\frac{1}{2}}{2^n}=\frac{3}{2}\cdot\frac{a_{n-1}-\frac{1}{2}}{2^{n-1}}+1.$　　设 $b_n=\frac{a_n-\frac{1}{2}}{2^n}$，则 $b_n=\frac{3}{2}b_{n-1}+1.$

设 $b_n+r=\frac{3}{2}(b_{n-1}+r)$，则 $b_n=\frac{3}{2}b_{n-1}+\frac{r}{2}$。于是 $r=2.$

$\therefore$ 数列 $\{b_n+2\}$ 是以 $b_1+2=\frac{a_1-\frac{1}{2}}{2}=\frac{17}{4}$ 为首项，$\frac{3}{2}$ 为公比的等比数列。

$\therefore b_n+2=\frac{17}{4}\cdot(\frac{3}{2})^{n-1}.$　$\therefore b_n=\frac{17}{4}\cdot(\frac{3}{2})^{n-1}-2.\therefore a_n=2^n\cdot b_n+\frac{1}{2}=\frac{17}{2}\cdot 3^{n-1}-2^{n+1}+\frac{1}{2}.$

（上接第61页）学生，扼杀了学生求知的欲望，让学生的大脑偷懒，长期就养成不思考比较概念、不弄清知识间关系专等现成答案的坏习惯。而“课后再说”，课后教师又忘记，学生课后多数也不记得再研究，结果不了了之，熄灭了学生智慧的火花，同时失去了一个引导学生学习解决问题的机会。其实学生每一个错误的答案背后都有其生成原因，老师要耐心倾听，关注学生的想法和思考过程，从而理解学生并加以正确的引导。在这个过程中，学生也学会辨析，弄清概念，真正掌握了知识。

例如，一位小学老师课堂上让学生背乘法口诀，小学生背成“三三得六”。老师不是急着批评其错误，告诉她答案。而是和学生一起用教具探究：先把两个三相加看结果，然后再加一个三，再看结果。最后说明两个三相加叫“二乘三，等于六；三个三相加叫三乘三，等于九”。这样学生才真正弄清自己错在哪里，也真正理解了乘法的含义。教师要让学生有这样的感觉：只要是我提出来的而且是有价值的问题，无论是课堂上能研究的还是不能研究的，老师都会很重视，而且会和我一起想办法创造条件去进行研究。时间一久，学生的问题意识和创新精神就会培养出来，并且还能学会自己去探究解决问题，这对学生工作以后的继续发展具有很大意义。

以上“六化”说来容易，做起来还是需要教师花费大量的心思和时间的。而且在网络等信息传播媒体高速发展的当代，学生的思维越来越新潮多变，要实践六化法，教师还要真正走进学生的生活，从学生的角度寻找新的教学灵感。六化法只是为教师设计具体教学方案提供一个简易便捷而又切实可行的思维模型。但教师要在现有的基础上让自己的教学变得更加有效，让课堂教学走进学生。

万方数据