江苏省仪征中学 2022 届高三数学三月调研测试热身训练一

班级_____姓名_____学号_____得分_____

一、单选题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共计 30 分．每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的．

1.已知菱形$ABCD$的对角线$AC=2$,点P在另一对角线BD上,则$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}$的值为(　　)

A.-2　　B.2　　C.1　　D.4

2.已知$a=\log_{32}8, b=\pi^{0.22}, c=\sin 1$,则$a,b,c$的大小关系是(　　)

A.$c<b<a$　　B.$c<a<b$　　C.$a<b<c$　　D.$a<c<b$

3.已知函数$f(x)=x^2-ae^x$有三个零点,则实数a的取值范围是(　　)

A.$\left(0,\frac{4}{e^2}\right)$　　B.$\left[0,\frac{4}{e^2}\right)$　　C.$\left[0,\frac{4}{e^2}\right]$　　D.$\left(0,\frac{4}{e}\right)$

4.已知正四棱锥$P-ABCD$的底面边长为$2\sqrt{2}$,侧棱PA与底面$ABCD$所成的角为$45°$,顶点P,A,B,C,D在球O的球面上,则球O的体积是(　　)

A.16π　　B.$\frac{32}{3}\pi$　　C.8π　　D.$\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$

5.现实世界中的很多随机变量遵循正态分布.例如反复测量某一个物理量,其测量误差X通常被认为服从正态分布.若某物理量做n次测量,最后结果的误差$X_n\sim N\left(0,\frac{2}{n}\right)$,则为使$|X_n|\geq\frac{1}{4}$的概率控制在$0.0456$以下,至少要测量的次数为(　　)

A.32　　B.64　　C.128　　D.256

【附】随机变量$X\sim N(u,\sigma^2)$,则$P(\mu-\sigma<X<u+\sigma)=0.6826$,

$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)=0.9544, P(u-3\sigma<X<\mu+3\sigma)=0.9974$.

6.已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点为F,准线为l,点A,B在抛物线C上,且满足$AF\perp BF$.设线段AB的中点到l的距离为d,则$\frac{AB}{d}$的最小值为(　　)

A.$\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　B.$\sqrt{3}$　　C.$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D.$\sqrt{2}$

二、多选题：本大题共 2 小题，每小题 5 分，共计 10 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

7.对于二项式$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)^8$的展开式,下列结论正确的是(　　)

A.各项系数之和为 0　　B.二项式系数的最大值为C_8^5

C.不存在常数项　　D.x的系数为-28

8.已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{4}=1(a>2)$的焦点为$F_1,F_2$,点$A(2,\sqrt{3})$在椭圆$C$的内部,点$M$在椭圆$C$上，则(　　)

A.$a>4$　　B. 椭圆C的离心率的取值范围为$\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

C.存在点M使得$MF_1\perp MF_2$　　D.$MF_1^2+MF_2^2>32$

三、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.请把答案填写在答题卡相应的位置上.

9.已知圆柱的底面半径为$\sqrt{2}$,体积为$4\sqrt{2}\pi$,则该圆柱的侧面积为_____.

10.写出一个同时具有下列性质① ② ③的函数$f(x)=$_____.

①$f(x)$为偶函数;②$f(x_1x_2)=f(x_1)+f(x_2)$;③$x\in(0,+\infty)$时,$f'(x)<0$

11.数列$\{a_n\}$: 1,1,2,3,5,8,…,称为斐波那契数列,该数列是由意大利数学家莱昂纳多·斐波那契(LeonardoFibonacci)从观察兔子繁殖而引入，故又称为“兔子数列”.数学上,该数列可表述为$a_1=a_2=1,a_{n+2}=a_{n+1}+a_n(n\in\mathbf{N}^*)$.对此数列有很多研究成果,如：该数列项的个位数是以 60 为周期变化的；通项公式$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$等.借助数学家对人类的此项贡献,我们不难得到$a_{n+1}^2=a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)=a_{n+2}a_{n+1}-a_{n+1}a_n$,从而易得$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{126}^2$值的个位数为_____.

12.在平面直角坐标系xOy中,动直线$kx-y=0,x+ky-2=0(k\in\mathbf{R})$的交点$P$的轨迹为$C$.若直线$l$与轨迹$C$交于点$M,N$,且满足$OM\cdot ON=1$,则点$O$到直线$l$的距离为_____.

四、解答题:本大题共 4 小题,共 46 分.请在答题卡指定区域内作答,解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

13.**(本小题满分 10 分)**

已知$\{a_n\}$是公差不为零的等差数列,$a_5=17,a_1,a_2,a_7$成等比数列.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式:

(2)将数列$\{a_n\}$与$\{3^n\}$的相同的项按由小到大的顺序排列构成的数列记为$\{b_n\}$,求数列$\{b_n\}$的前n项和S_n.

14.**(本小题满分 12 分)**

某网店为预估今年“双11”期间商品的销售情况，随机抽取去年“双11”期间购买该店商品的 100 位买主的购买记录,得到如下数据:

	500 元及以上	少于 500 元	合计
男	25	25	50
女	15	35	50
合计	40	60	100

(1)判断是否有95%的把握认为购买金额是否少于 500 元与性别有关;

(2)为增加销量,该网店计划今年“双 11”期间推出如下优惠方案:购买金额不少于 500 元的买主可抽奖 3 次,每次中奖概率为$\frac{1}{3}$(每次抽奖互不影响),中奖 1 次减 50 元,中奖 2 次减 100 元,中奖 3 次减 150 元.据此优惠方案,求在该网店购买 500 元商品,实际付款数X(元)的分布列和数学期望.

附:$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,$n=a+b+c+d$.

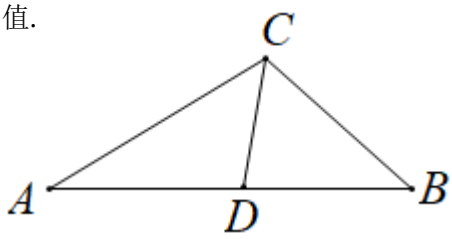
$P(\chi^2\geq k)$	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
k	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

15.（**本小题满分 12 分**）

在$\triangle ABC$中，已知$(\sin A-\sin C)^2=\sin^2 B-\frac{2}{5}\sin A\sin C$.

(1)求$\cos B$的值;

(2)若D在AB边上,且满足$AD=BC,\angle BDC=2B$,求$\tan A$的值.



16.**(本小题满分 12 分)**

在平面直角坐标系xOy中,设双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右准线$x=\frac{\sqrt{5}}{5}$与其两条渐近线的交点分别为$A,B$,且$\tan\angle AOB=-\frac{4}{3}$.

(1)求双曲线C的方程:

(2)设动直线l与双曲线C相交于点M,N,若$OM\perp ON$,求证:存在定圆与直线l相切,并求该定圆的方程.

江苏省仪征中学 2022 届高三数学三月调研测试热身训练一

一、单选题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共计 30 分．每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的．

1.已知菱形$ABCD$的对角线$AC=2$,点P在另一对角线BD上,则$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}$的值为(　　)

A.-2　　B.2　　C.1　　D.4

【答案】B

2.已知$a=\log_{32}8, b=\pi^{0.22}, c=\sin 1$,则$a,b,c$的大小关系是(　　)

A.$c<b<a$　　B.$c<a<b$　　C.$a<b<c$　　D.$a<c<b$

【答案】D

3.已知函数$f(x)=x^2-ae^x$有三个零点,则实数a的取值范围是(　　)

A.$\left(0,\frac{4}{e^2}\right)$　　B.$\left[0,\frac{4}{e^2}\right)$　　C.$\left[0,\frac{4}{e^2}\right]$　　D.$\left(0,\frac{4}{e}\right)$

【答案】A

4.已知正四棱锥$P-ABCD$的底面边长为$2\sqrt{2}$,侧棱PA与底面$ABCD$所成的角为$45°$,顶点P,A,B,C,D在球O的球面上,则球O的体积是(　　)

A.16π　　B.$\frac{32}{3}\pi$　　C.8π　　D.$\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$

【答案】B

5.现实世界中的很多随机变量遵循正态分布.例如反复测量某一个物理量,其测量误差X通常被认为服从正态分布.若某物理量做n次测量,最后结果的误差$X_n\sim N\left(0,\frac{2}{n}\right)$,则为使$|X_n|\geq\frac{1}{4}$的概率控制在$0.0456$以下,至少要测量的次数为(　　)

A.32　　B.64　　C.128　　D.256

【附】随机变量$X\sim N(u,\sigma^2)$,则$P(\mu-\sigma<X<u+\sigma)=0.6826$,

$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)=0.9544, P(u-3\sigma<X<\mu+3\sigma)=0.9974$.

【答案】C

6.已知抛物线$C: y^2=2px(p>0)$的焦点为F,准线为l,点A,B在抛物线C上,且满足$AF\perp BF$.设线段AB的中点到l的距离为d,则$\frac{AB}{d}$的最小值为(　　)

A.$\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　B.$\sqrt{3}$　　C.$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D.$\sqrt{2}$

【答案】D

二、多选题：本大题共 2 小题，每小题 5 分，共计 10 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

7.对于二项式$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)^8$的展开式,下列结论正确的是(　　)

A.各项系数之和为 0　　B.二项式系数的最大值为C_8^5

C.不存在常数项　　D.x的系数为-28

【答案】AC

8.已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{4}=1(a>2)$的焦点为$F_1,F_2$,点$A(2,\sqrt{3})$在椭圆$C$的内部,点$M$在椭圆$C$上，则(　　)

A.$a>4$　　B. 椭圆C的离心率的取值范围为$\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

C.存在点M使得$MF_1\perp MF_2$　　D.$MF_1^2+MF_2^2>32$

【答案】ACD

三、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.请把答案填写在答题卡相应的位置上.

9.已知圆柱的底面半径为$\sqrt{2}$,体积为$4\sqrt{2}\pi$,则该圆柱的侧面积为_____.

【答案】8π

10.写出一个同时具有下列性质① ② ③的函数$f(x)=$_____.

①$f(x)$为偶函数;②$f(x_1x_2)=f(x_1)+f(x_2)$;③$x\in(0,+\infty)$时,$f'(x)<0$

【答案】$\log_{\frac{1}{2}}|x|$;$-\ln|x|$等(答案不唯一)

11.数列$\{a_n\}$:1,1,2,3,5,8,…,称为斐波那契数列,该数列是由意大利数学家莱昂纳多·斐波那契(LeonardoFibonacci)从观察兔子繁殖而引入，故又称为“兔子数列”.数学上,该数列可表述为$a_1=a_2=1,a_{n+2}=a_{n+1}+a_n(n\in\mathbf{N}^*)$.对此数列有很多研究成果,如：该数列项的个位数是以60 为周期变化的；通项公式$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$等.借助数学家对人类的此项贡献,我们不难得到$a_{n+1}^2=a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)=a_{n+2}a_{n+1}-a_{n+1}a_n$,从而易得$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{126}^2$值的个位数为_____.

【答案】4

12.在平面直角坐标系xOy中,动直线$kx-y=0,x+ky-2=0(k\in\mathbf{R})$的交点$P$的轨迹为$C$.若直线$l$与轨迹$C$交于点$M,N$,且满足$OM\cdot ON=1$,则点$O$到直线$l$的距离为_____.

【答案】$\frac{1}{2}$

四、解答题:本大题共 4 小题,共 46 分.请在答题卡指定区域内作答,解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

13.**(本小题满分 10 分)**

已知$\{a_n\}$是公差不为零的等差数列,$a_5=17,a_1,a_2,a_7$成等比数列.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式:

(2)将数列$\{a_n\}$与$\{3^n\}$的相同的项按由小到大的顺序排列构成的数列记为$\{b_n\}$,求数列$\{b_n\}$的前n项和S_n.

【解析】设等差数列的公差为$d,d\neq 0$.

（1）设众差数列的公差为$d,d\neq 0$,

由条件得$\begin{cases}a_1+4\mathrm{d}=17,\\(a_1+d)^2=a_1(a_1+6d),\end{cases}$ 解之得$\begin{cases}a_1=1,\\d=4,\end{cases}$

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=4n-3$.……4分

(2)设$4n-3=3^m$,

则$n=\dfrac{3^m+3}{4}=\dfrac{(4-1)^m+3}{4}$

$=\dfrac{4^m-C_m^1 4^{m-1}+\cdots+(-1)^{m-1}C_{m1}^{m-1}4+(-1)^m C_m^m+3}{4}$

当$m=2k,k\in \mathrm{N}^*$时，$(-1)^m C_m^m+3=4$,所以$n\in \mathrm{N}^*$,

当$m=2k-1,k\in \mathrm{N}^*$时,$(-1)^m C_m^m+3=2$,所以$n\notin \mathrm{N}^*$,

所以$b_n=3^{2n}=9^n$,

所以$S_n=\frac{9(1-9^n)}{1-9}=\frac{9}{8}(9^n-1)$.

14.(本小题满分 12 分)

某网店为预估今年“双11”期间商品的销售情况，随机抽取去年“双11”期间购买该店商品的 100 位买主的购买记录,得到如下数据:

	500 元及以上	少于 500 元	合计
男	25	25	50
女	15	35	50
合计	40	60	100

(1)判断是否有95%的把握认为购买金额是否少于 500 元与性别有关;

(2)为增加销量,该网店计划今年“双 11”期间推出如下优惠方案:购买金额不少于 500 元的买主可抽奖 3 次,每次中奖概率为$\frac{1}{3}$(每次抽奖互不影响),中奖 1 次减 50 元,中奖 2 次减 100 元,中奖 3 次减 150 元.据此优惠方案,求在该网店购买 500 元商品,实际付款数X(元)的分布列和数学期望.

附:$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,$n=a+b+c+d$.

$P(\chi^2\geq k)$	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
k	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

【解析】根据列联表中的数据,可以求得$x^2=\frac{100(25\times35-15\times25)^2}{50\times50\times40\times60}=\frac{25}{6}\approx4.1667>3.841$,

所以我们有95%的把握认为购买金额是否少于**500**元与性别有关.……4 分

（2）因为购买金额不少于 500 元的买主可抽奖 3 次,中奖 1 次减 50 元,中奖 2 次减 100 元,中奖 3 次减 150 元,所以X的可能取值为500,450,400,350,因为每次中奖概率为$\frac{1}{3}$,所以不中奖的概率为$\frac{2}{3}$.

所以$P(X=500)=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$,……5分

$P(X=450)=C_3^1\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$,……6分

$P(X=400)=C_3^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$,……7分

$P(X=350)=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$.……8分

实际付款数X(元)的分布列为:

X	500	450	400	350
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

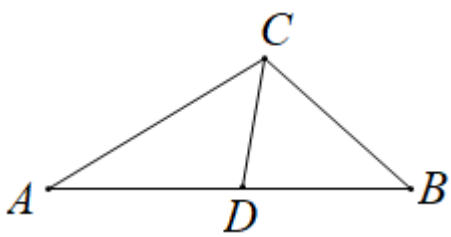
…10分

15.**（本小题满分 12 分）**

在△ ABC中，已知$(\sin A-\sin C)^2=\sin^2 B-\frac{2}{5}\sin A\sin C$.

（1）求$\cos B$的值;

(2)若D在AB边上,且满足$AD=BC,\angle BDC=2B$,求$\tan A$的值.



【解析】设△ ABC的角A,B,C所对的边为a,b,c

由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,及$(\sin A-\sin C)^2=\sin^2 B-\frac{2}{5}\sin A\sin C$,

得$(a-c)^2=b^2-\frac{2}{5}ac$，即$a^2+c^2-b^2=\frac{8}{5}ac$,……2分

由余弦定理$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$,得$\cos B=\frac{4}{5}$.……4分

(2)设$AD=BC=a$,在△ BCD中,$\angle BDC=2B$,$\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{CD}{\sin B}$,即$\frac{a}{\sin 2B}=\frac{CD}{\sin B}$①,

在△ ACD中,$\frac{AD}{\sin\angle ACD}=\frac{CD}{\sin A}$,因为$\angle ACD=2B-A$,所以$\frac{a}{\sin(2B-A)}=\frac{CD}{\sin A}$,②,

由① ②得,$\frac{\sin(2B-A)}{\sin 2B}=\frac{\sin A}{\sin B}$,所以$\sin(2B-A)=2\cos B\sin A$,

所以$\sin 2B\cos A-\cos 2B\sin A=2\cos B\sin A$,

所以$\tan A=\frac{\sin 2B}{\cos 2B+2\cos B}$.……8分

由①知,$\cos B=\frac{4}{5}$,又$0<B<\pi$,所以$\sin B=\frac{3}{5}$,

所以$\sin 2B=2\sin B\cos B=\frac{24}{25}$,$\cos 2B=\cos^2 B-\sin^2 B=\frac{7}{25}$,……10分

$\tan A=\frac{\sin 2B}{\cos 2B+2\cos B}=\frac{\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}+\frac{8}{5}}=\frac{24}{47}$. ……12 分

16.**(本小题满分 12 分)**

在平面直角坐标系xOy中,设双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右准线$x=\frac{\sqrt{5}}{5}$与其两条渐近线的交点分别为$A,B$,且$\tan\angle AOB=-\frac{4}{3}$.

(1)求双曲线C的方程:

(2)设动直线l与双曲线C相交于点M,N,若$OM\perp ON$,求证:存在定圆与直线l相切,并求该定圆的方程.

【解析】(1)由条件得$\begin{cases}\frac{a^2}{c}=\frac{\sqrt{5}}{5},\\ 2\times\frac{b}{a}\\ 1-\left(\frac{b}{a}\right)^2\\ c=-\frac{4}{a^2+b^2},\end{cases}$,解之得$\begin{cases}a=1,\\ b=2,\\ c=\sqrt{5},\end{cases}$

所以双曲线C的方程为$x^2-\frac{y^2}{4}=1$.……4分

(2)当直线l的斜率存在时，设直线l的方程为$y=kx+m$，$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$,

由$\begin{cases}y=kx+m,\\ x^2-\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$得$(4-k^2)x^2-2kmx-(m^2+4)=0,$

所以$\begin{cases}4-k^2\neq 0,\\ \Delta=4k^2m^2+4(4-k^2)(m^2+4)>0,\end{cases}$

且$x_1+x_2=\frac{2km}{4-k^2},x_1x_2=\frac{-(m^2+4)}{4-k^2},$

因为$OM\perp ON$,所以$x_1x_2+y_1y_2=0,$

即$x_1x_2+(kx_1+m)(kx_2+m)=0,$

所以$(1+k^2)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=0,$

即$-(1+k^2)\frac{m^2+4}{4-k^2}+\frac{2k^2m^2}{4-k^2}+m^2=0,$

化简得$1+k^2=\frac{3}{4}m^2$,即$\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3},$

此时存在定圆与直线l相切,该定圆的方程为$x^2+y^2=\frac{4}{3}$;……10分

当直线l的斜率不存在时,直线方程为$x=t$,此时$M\left(t,2\sqrt{t^2-1}\right),N\left(t,-2\sqrt{t^2-1}\right),$

因为$OM\perp ON$,所以$x_1x_2+y_1y_2=0$,即$t^2-4(t^2-1)=0$,所以$t=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3},$

也满足直线l与圆$x^2+y^2=\frac{4}{3}$相切.

综上,存在定圆与直线l相切,该定圆的方程为$x^2+y^2=\frac{4}{3}$.……12分