

江苏省仪征中学 2022 届高三数学三月调研测试热身训练四

班级_____姓名_____学号_____得分_____

一、单选题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共计 30 分．每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的．

1. 设抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点为 F ，过点 $(-2, 0)$ 且斜率为 $\frac{2}{3}$ 的直线与 C 交于 M, N 两点，则

$$\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FN} = (\quad)$$

A. 5

B. 6

C. 7

D. 8

2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0, \\ \ln x, & x > 0, \end{cases}$ $g(x) = f(x) + x + a$. 若 $g(x)$ 存在 2 个零点，则 a 的取值范围

是 ()

A. $[-1, 0)$

B. $[0, +\infty)$

C. $[-1, +\infty)$

D. $[1, +\infty)$

3. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{3} - y^2 = 1$, O 为坐标原点, F 为 C 的右焦点, 过 F 的直线与 C 的两条渐近线的交点分别为 M, N . 若 $\triangle OMN$ 为直角三角形, 则 $|MN| = (\quad)$

A. $\frac{3}{2}$

B. 3

C. $2\sqrt{3}$

D. 4

4. 某群体中的每位成员使用移动支付的概率都为 p , 各成员的支付方式相互独立, 设 X 为该群体的 10 位成员中使用移动支付的人数, $DX = 2.4$, $P(X = 4) < P(X = 6)$, 则 $p = (\quad)$

A. 0.7

B. 0.6

C. 0.4

D. 0.3

5. 已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 的奇函数, 满足 $f(1-x) = f(1+x)$. 若 $f(1) = 2$, 则 $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(50) = (\quad)$

A. -50

B. 0

C. 2

D. 50

6. 已知正方体的棱长为 1, 每条棱所在直线与平面 α 所成的角都相等, 则 α 截此正方体所得截面面积的最大值为 ()

A. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

二、多选题：本大题共 2 小题，每小题 5 分，共计 10 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

7. 设 A, B, C, D 是同一个半径为 4 的球的球面上四点, $\triangle ABC$ 为等边三角形且其面积为 $9\sqrt{3}$, 则三棱锥 $D-ABC$ 体积的可能值为 ()

A. $12\sqrt{3}$

B. $18\sqrt{3}$

C. $24\sqrt{3}$

D. $54\sqrt{3}$

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且有 $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)a_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})a_{n+1}$ ($n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$)，

$a_1 = a_2 = 1$. 数列 $\left\{ \frac{1}{\log_2 S_{n+1} \cdot \log_2 S_{n+2}} \right\}$ 的前 n 项和为 T_n ，则以下结论正确的是()

- A. $a_n = 1$ B. $S_n = 2^{n-1}$ C. $T_n = \frac{n+1}{n+3}$ D. $\{T_n\}$ 为递增数列

三、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.请把答案填写在答题卡相应的位置上.

9. 已知圆锥的顶点为 S ，母线 SA ， SB 互相垂直， SA 与圆锥底面所成角为 30° ，若 $\triangle SAB$ 的面积为 8，则该圆锥的体积为_____.

10. 已知函数 $f(x) = 2 \sin x + \sin 2x$ ，则 $f(x)$ 的最小值是_____.

11. 已知点 $M(-1, 1)$ 和抛物线 $C: y^2 = 4x$ ，过 C 的焦点且斜率为 k 的直线与 C 交于 A ， B 两点. 若 $\angle AMB = 90^\circ$ ，则 $k =$ _____.

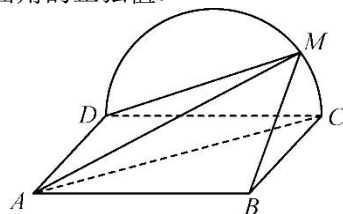
12. 甲、乙两队进行篮球决赛，采取七场四胜制（当一队赢得四场胜利时，该队获胜，决赛结束）。根据前期比赛成绩，甲队的主客场安排依次为“主主客客主客主”。设甲队主场取胜的概率为 0.6，客场取胜的概率为 0.5，且各场比赛结果相互独立，则甲队以 4:1 获胜的概率是_____.

四、解答题:本大题共 4 小题,共 46 分.请在答题卡指定区域内作答,解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

13. 如图，边长为 2 的正方形 $ABCD$ 所在的平面与半圆弧 CD 所在平面垂直， M 是 CD 上异于 C ， D 的点.

(1) 证明：平面 $AMD \perp$ 平面 BMC ；

(2) 当三棱锥 $M-ABC$ 体积最大时，求面 MAB 与面 MCD 所成二面角的正弦值.



14. 某工厂的某种产品成箱包装，每箱 200 件，每一箱产品在交付用户之前要对产品作检验，如检验出不合格品，则更换为合格品．检验时，先从这箱产品中任取 20 件作检验，再根据检验结果决定是否对余下的所有产品作检验，设每件产品为不合格品的概率都为 p ($0 < p < 1$)，且各件产品是否为不合格品相互独立．

(1) 记 20 件产品中恰有 2 件不合格品的概率为 $f(p)$ ，求 $f(p)$ 的最大值点 p_0 ．

(2) 现对一箱产品检验了 20 件，结果恰有 2 件不合格品，以 (1) 中确定的 p_0 作为 p 的

值．已知每件产品的检验费用为 2 元，若有不合格品进入用户手中，则工厂要对每件不合格品支付 25 元的赔偿费用．

(i) 若不对该箱余下的产品作检验，这一箱产品的检验费用与赔偿费用的和记为 X ，求 EX ；

(ii) 以检验费用与赔偿费用之和的期望值为决策依据，是否该对这箱余下的所有产品作检验？

15. 已知斜率为 k 的直线 l 与椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 交于 A, B 两点，线段 AB 的中点为

$M(1, m)$ ($m > 0$)．

(1) 证明： $k < -\frac{1}{2}$ ；

(2) 设 F 为 C 的右焦点， P 为 C 上一点，且 $\overrightarrow{FP} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} = \mathbf{0}$ ．证明： $|\overrightarrow{FA}|, |\overrightarrow{FP}|, |\overrightarrow{FB}|$ 成等差数列，并求该数列的公差．

16. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x} - x + a \ln x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 , 证明: $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$.

江苏省仪征中学 2022 届高三数学三月调研测试热身训练四

班级_____姓名_____学号_____得分_____

一、单选题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共计 30 分。每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的。

1. 设抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点为 F ，过点 $(-2, 0)$ 且斜率为 $\frac{2}{3}$ 的直线与 C 交于 M, N 两点，则 $FM \cdot FN = ()$

A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

答案：D

解答：由题意知直线 MN 的方程为 $y = \frac{2}{3}(x+2)$ ，设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ ，与抛物线方程

$$\text{联立有} \begin{cases} y = \frac{2}{3}(x+2) \\ y^2 = 4x \end{cases}, \text{可得} \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = 4 \end{cases},$$

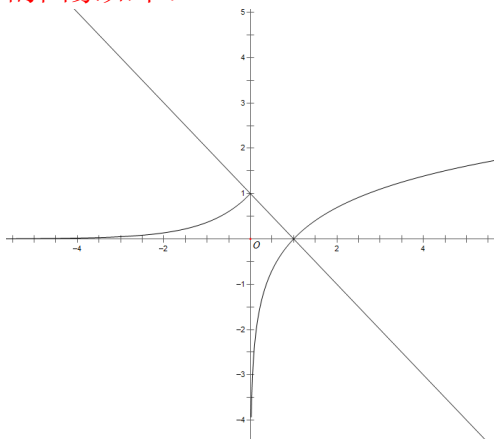
$$\therefore FM = (0, 2), FN = (3, 4), \therefore FM \cdot FN = 0 \times 3 + 2 \times 4 = 8.$$

2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0, \\ \ln x, & x > 0, \end{cases} g(x) = f(x) + x + a$. 若 $g(x)$ 存在 2 个零点，则 a 的取值范围是 $()$

A. $[-1, 0)$ B. $[0, +\infty)$ C. $[-1, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$

答案：C

解答： $\because g(x) = f(x) + x + a$ 存在 2 个零点，即 $y = f(x)$ 与 $y = -x - a$ 有两个交点， $f(x)$ 的图象如下：



要使得 $y = -x - a$ 与 $f(x)$ 有两个交点，则有 $-a \leq 1$ 即 $a \geq -1$ ， $\therefore$ 选 C.

3. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ ， O 为坐标原点， F 为 C 的右焦点，过 F 的直线与 C 的两条渐近线的交点分别为 M, N . 若 $\triangle OMN$ 为直角三角形，则 $|MN| = ()$

A. $\frac{3}{2}$ B. 3 C. $2\sqrt{3}$ D. 4

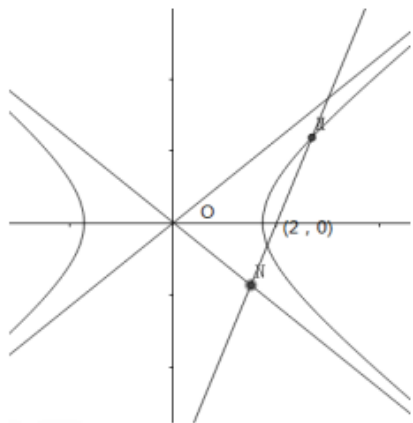
答案: B

解答: 渐近线方程为: $\frac{x^2}{3} - y^2 = 0$, 即 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$, $\because \triangle OMN$ 为直角三角形, 假设

$$\angle ONM = \frac{\pi}{2}, \text{ 如图, } \therefore k_{NM} = \sqrt{3}, \text{ 直线 } MN \text{ 方程为 } y = \sqrt{3}(x-2). \text{ 联立 } \begin{cases} y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x \\ y = \sqrt{3}(x-2) \end{cases}$$

$$\therefore N\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \text{ 即 } ON = \sqrt{3}, \therefore \angle MON = \frac{\pi}{3}, \therefore |MN| = 3,$$

故选 B.



4. 某群体中的每位成员使用移动支付的概率都为 p , 各成员的支付方式相互独立, 设 X 为该群体的 10 位成员中使用移动支付的人数, $DX = 2.4$, $P(X = 4) < P(X = 6)$, 则 $p =$ ()

A. 0.7

B. 0.6

C. 0.4

D. 0.3

答案: B

解答: 由 $X \sim B(10, p)$, $\therefore DX = 10p(1-p) = 2.4$, $\therefore 10p^2 - 10p + 2.4 = 0$, 解之得

$$p_1 = 0.4, p_2 = 0.6, \text{ 由 } P(X = 4) < P(X = 6), \text{ 有 } p = 0.6.$$

5. 已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 的奇函数, 满足 $f(1-x) = f(1+x)$. 若 $f(1) = 2$, 则

$$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(50) = ()$$

A. -50

B. 0

C. 2

D. 50

【答案】C

【解析】因为 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 的奇函数, 且 $f(1-x) = f(1+x)$,

所以 $f(1+x) = -f(x-1)$, $\therefore f(3+x) = -f(x+1) = f(x-1)$, $\therefore T = 4$,

因此 $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(50) = 12[f(1) + f(2) + f(3) + f(4)] + f(1) + f(2)$,

$$\because f(3) = -f(1), f(4) = -f(2), \therefore f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 0,$$

$$\because f(2) = f(-2) = -f(2) \therefore f(2) = 0, \text{ 从而 } f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(50) = f(1) = 2, \text{ 故选 C.}$$

6. 已知正方体的棱长为 1, 每条棱所在直线与平面 α 所成的角都相等, 则 α 截此正方体所得截面面积的最大值为 ()

A. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

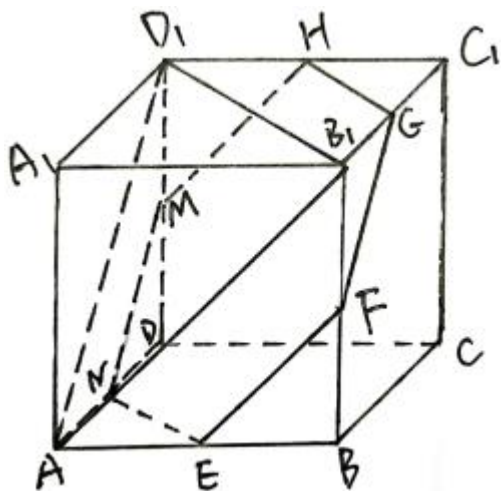
C. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

答案: A

解答: 由于截面与每条棱所成的角都相等, 所以平面 α 中存在平面与平面 AB_1D_1 平行

(如图)，而在与平面 AB_1D_1 平行的所有平面中，面积最大的为由各棱的中点构成的截面 $EFGHNM$ ，而平面 $EFGHNM$ 的面积 $S = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ 。



二、多选题：本大题共 2 小题，每小题 5 分，共计 10 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

7. 设 A, B, C, D 是同一个半径为 4 的球的球面上四点， $\triangle ABC$ 为等边三角形且其面积为 $9\sqrt{3}$ ，则三棱锥 $D-ABC$ 体积的可能值为 ()

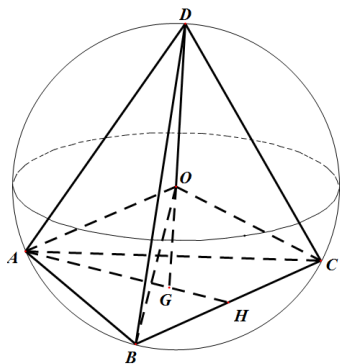
- A. $12\sqrt{3}$ B. $18\sqrt{3}$ C. $24\sqrt{3}$ D. $54\sqrt{3}$

答案：AB

解答：如图， $\triangle ABC$ 为等边三角形，点 O 为 A, B, C, D 外接球的球心， G 为 $\triangle ABC$ 的重心，由 $S_{\triangle ABC} = 9\sqrt{3}$ ，得 $AB = 6$ ，取 BC 的中点 H ， $\therefore AH = AB \cdot \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}$ ， $\therefore$

$AG = \frac{2}{3}AH = 2\sqrt{3}$ ， $\therefore$ 球心 O 到面 ABC 的距离为 $d = \sqrt{4^2 - (2\sqrt{3})^2} = 2$ ， $\therefore$ 三棱锥

$D-ABC$ 体积最大值 $V_{D-ABC} = \frac{1}{3} \times 9\sqrt{3} \times (2 + 4) = 18\sqrt{3}$ 。故选 AB



8. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且有 $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)a_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})a_{n+1}$

$(n \geq 2, n \in \mathbf{N}^+)$, $a_1 = a_2 = 1$. 数列 $\left\{ \frac{1}{\log_2 S_{n+1} \cdot \log_2 S_{n+2}} \right\}$ 的前 n 项和为 T_n , 则以下结论正确的是()

A. $a_n = 1$

B. $S_n = 2^{n-1}$

C. $T_n = \frac{n+1}{n+3}$

D. $\{T_n\}$ 为递增数列

【答案】BD

【解析】由 $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)a_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) \cdot a_{n+1}$, 得 $S_n(S_n - S_{n-1}) = S_{n-1}(S_{n+1} - S_n)$, 化简得 $S_n^2 = S_{n-1}S_{n+1}$, 根据等比数列的性质得数列 $\{S_n\}$ 是等比数列. 易知 $S_1 = 1$, $S_2 = 2$, 故 $\{S_n\}$ 的公

比为 2, 则 $S_n = 2^{n-1}$, $S_{n+1} = 2^n$, $S_{n+2} = 2^{n+1}$, $\frac{1}{\log_2 S_{n+1} \cdot \log_2 S_{n+2}} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. 由裂项相消

法得 $T_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$. 故 B 正确, C 错误, D 正确. 根据 $S_n = 2^{n-1}$ 知 A 选项错误, 故选 BD.

三、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.请把答案填写在答题卡相应的位置上.

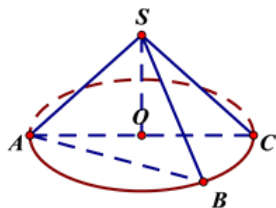
9. 已知圆锥的顶点为 S , 母线 SA , SB 互相垂直, SA 与圆锥底面所成角为 30° , 若 $\triangle SAB$ 的面积为 8, 则该圆锥的体积为_____.

【答案】 8π

【解析】如下图所示, $\angle SAO = 30^\circ$, $\angle ASB = 90^\circ$, 又 $S_{\triangle SAB} = \frac{1}{2}SA \cdot SB = \frac{1}{2}SA^2 = 8$,

解得 $SA = 4$, 所以 $SO = \frac{1}{2}SA = 2$, $AO = \sqrt{SA^2 - SO^2} = 2\sqrt{3}$, 所以该圆锥的体积为

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot OA^2 \cdot SO = 8\pi.$$



10. 已知函数 $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$, 则 $f(x)$ 的最小值是_____.

答案: $-\frac{3}{2}\sqrt{3}$

解答: $\because f(x) = 2\sin x + \sin 2x$, $\therefore f(x)$ 最小正周期为 $T = 2\pi$, $\therefore$

$f'(x) = 2(\cos x + \cos 2x) = 2(2\cos^2 x + \cos x - 1)$, 令 $f'(x) = 0$, 即 $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$,

$$\therefore \cos x = \frac{1}{2} \text{ 或 } \cos x = -1.$$

$\therefore$ 当 $\cos x = \frac{1}{2}$, 为函数的极小值点, 即 $x = \frac{\pi}{3}$ 或 $x = \frac{5}{3}\pi$,

当 $\cos x = -1$, $x = \pi$

$$\therefore f\left(\frac{5}{3}\pi\right) = -\frac{3}{2}\sqrt{3}, f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{3}, f(0) = f(2\pi) = 0, f(\pi) = 0$$

$$\therefore f(x) \text{ 最小值为 } -\frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

11. 已知点 $M(-1, 1)$ 和抛物线 $C: y^2 = 4x$ ，过 C 的焦点且斜率为 k 的直线与 C 交于 A, B 两点. 若 $\angle AMB = 90^\circ$ ，则 $k =$ _____.

答案: 2

解答: 依题意得, 抛物线 C 的焦点为 $F(1, 0)$, 故可设直线 $AB: y = k(x - 1)$, 联立

$$\begin{cases} y = k(x - 1), \\ y^2 = 4x, \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 得 } k^2 x^2 - (2k^2 + 4)x + k^2 = 0, \text{ 设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 则}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{2k^2 + 4}{k^2}, x_1 x_2 = 1, \therefore y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) - 2k = \frac{4}{k},$$

$$y_1 y_2 = k^2 [x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1] = -4. \text{ 又 } MA = (x_1 + 1, y_1 - 1), MB = (x_2 + 1, y_2 - 1), \therefore$$

$$MA \cdot MB = (x_1 + 1)(x_2 + 1) + (y_1 - 1)(y_2 - 1)$$

$$= x_1 x_2 + (x_1 + x_2) + 1 + y_1 y_2 - (y_1 + y_2) + 1 = 1 + \frac{2k^2 + 4}{k^2} + 1 - 4 - \frac{4}{k} + 1 = 0,$$

$$\therefore k = 2.$$

12. 甲、乙两队进行篮球决赛, 采取七场四胜制 (当一队赢得四场胜利时, 该队获胜, 决赛结束). 根据前期比赛成绩, 甲队的主客场安排依次为“主主客客主客主”. 设甲队主场取胜的概率为 0.6, 客场取胜的概率为 0.5, 且各场比赛结果相互独立, 则甲队以 4:1 获胜的概率是_____.

【分析】甲队以 4:1 获胜包含的情况有: ①前 5 场比赛中, 第一场负, 另外 4 场全胜, ②前 5 场比赛中, 第二场负, 另外 4 场全胜, ③前 5 场比赛中, 第三场负, 另外 4 场全胜, ④前 5 场比赛中, 第四场负, 另外 4 场全胜, 由此能求出甲队以 4:1 获胜的概率.

【解答】解: 甲队的主客场安排依次为“主主客客主客主”.

设甲队主场取胜的概率为 0.6, 客场取胜的概率为 0.5, 且各场比赛结果相互独立,

甲队以 4:1 获胜包含的情况有:

$$\text{①前 5 场比赛中, 第一场负, 另外 4 场全胜, 其概率为: } p_1 = 0.4 \times 0.6 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.6 = 0.036,$$

$$\text{②前 5 场比赛中, 第二场负, 另外 4 场全胜, 其概率为: } p_2 = 0.6 \times 0.4 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.6 = 0.036,$$

$$\text{③前 5 场比赛中, 第三场负, 另外 4 场全胜, 其概率为: } p_3 = 0.6 \times 0.6 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.6 = 0.054,$$

$$\text{④前 5 场比赛中, 第四场负, 另外 4 场全胜, 其概率为: } p_4 = 0.6 \times 0.6 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.6 = 0.054,$$

则甲队以 4:1 获胜的概率为:

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0.036 + 0.036 + 0.054 + 0.054 = 0.18.$$

故答案为: 0.18.

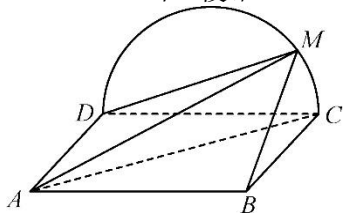
四、解答题: 本大题共 4 小题, 共 46 分. 请在答题卡指定区域内作答, 解答时应写出文字说明、证

明过程或演算步骤.

13. 如图, 边长为 2 的正方形 $ABCD$ 所在的平面与半圆弧 CD 所在平面垂直, M 是 CD 上异于 C, D 的点.

(1) 证明: 平面 $AMD \perp$ 平面 BMC ;

(2) 当三棱锥 $M-ABC$ 体积最大时, 求面 MAB 与面 MCD 所成二面角的正弦值.



解答: (1) $\because$ 正方形 $ABCD \perp$ 半圆面 CMD ,

$\therefore AD \perp$ 半圆面 CMD , $\therefore AD \perp$ 平面 MCD .

$\because CM$ 在平面 MCD 内, $\therefore AD \perp CM$, 又 $\because M$ 是半圆弧 CD 上异于 C, D 的点, $\therefore CM \perp MD$.

又 $\because AD \cap DM = D$, $\therefore CM \perp$ 平面 ADM , $\because CM$ 在平面 BCM 内, $\therefore$ 平面 $BCM \perp$ 平面 ADM .

(2) 如图建立坐标系:

$\because S_{\triangle ABC}$ 面积恒定,

$\therefore MO \perp CD$, V_{M-ABC} 最大.

$M(0, 0, 1)$, $A(2, -1, 0)$, $B(2, 1, 0)$, $C(0, 1, 0)$, $D(0, -1, 0)$,

设面 MAB 的法向量为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$, 设面 MCD 的法向量为 $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$,

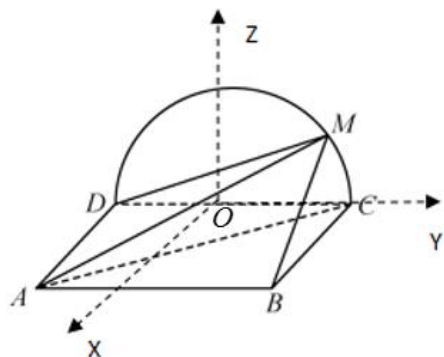
$\vec{MA} = (2, -1, -1)$, $\vec{MB} = (2, 1, -1)$,

$\vec{MC} = (0, 1, -1)$, $\vec{MD} = (0, -1, -1)$,

$$\begin{cases} 2x_1 - y_1 - z_1 = 0 \\ 2x_1 + y_1 - z_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{m} = (1, 0, 2),$$

同理 $\vec{n} = (1, 0, 0)$,

$$\therefore \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \therefore \sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$



14. 某工厂的某种产品成箱包装, 每箱 200 件, 每一箱产品在交付用户之前要对产品作检验, 如检验出不合格品, 则更换为合格品. 检验时, 先从这箱产品中任取 20 件作检验, 再根据检验结果决定是否对余下的所有产品作检验, 设每件产品为不合格品的概率都为 p ($0 < p < 1$), 且各件产品是否为不合格品相互独立. (1) 记 20 件产品中恰有 2 件不合格品的概率为

$f(p)$, 求 $f(p)$ 的最大值点 p_0 .

(2) 现对一箱产品检验了 20 件, 结果恰有 2 件不合格品, 以 (1) 中确定的 p_0 作为 p 的值. 已知每件产品的检验费用为 2 元, 若有不合格品进入用户手中, 则工厂要对每件不合格品支付 25 元的赔偿费用.

(i) 若不对该箱余下的产品作检验, 这一箱产品的检验费用与赔偿费用的和记为 X , 求 EX ;

(ii) 以检验费用与赔偿费用之和的期望值为决策依据, 是否该对这箱余下的所有产品作检验?

解答: (1) 由题可知 $f(p) = C_{20}^2 p^2 (1-p)^{18}$ ($0 < p < 1$).

$$\therefore f(p) = C_{20}^2 [2p(1-p)^{18} + 18p^2(1-p)^{17} \times (-1)] = 2C_{20}^2 p(1-p)^{17}(1-10p)$$

$\therefore$ 当 $p \in (0, \frac{1}{10})$ 时, $f'(p) > 0$, 即 $f(p)$ 在 $(0, \frac{1}{10})$ 上递增; 当 $p \in (\frac{1}{10}, 1)$ 时,

$f'(p) < 0$, 即 $f(p)$ 在 $(\frac{1}{10}, 1)$ 上递减.

$\therefore f(p)$ 在点 $p = \frac{1}{10}$ 处取得最大值, 即 $p_0 = \frac{1}{10}$.

(2) (i) 设余下产品中不合格品数量为 Y , 则 $X = 40 + 25Y$, 由题可知

$$Y \sim B(180, \frac{1}{10}), \therefore EY = np = 180 \times \frac{1}{10} = 18.$$

$$\therefore EX = E(40 + 25Y) = 40 + 25EY = 40 + 25 \times 18 = 490 \text{ (元)}.$$

(ii) 由 (i) 可知一箱产品若全部检验只需花费 400 元, 若余下的不检验则要 490 元, 所以应该对余下的产品作检验.

15. 知斜率为 k 的直线 l 与椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 交于 A, B 两点, 线段 AB 的中点为

$M(1, m) (m > 0)$.

(1) 证明: $k < -\frac{1}{2}$;

(2) 设 F 为 C 的右焦点, P 为 C 上一点, 且 $\overrightarrow{FP} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} = \mathbf{0}$. 证明: $|\overrightarrow{FA}|, |\overrightarrow{FP}|, |\overrightarrow{FB}|$ 成等差数列, 并求该数列的公差.

解答:

(1) 设直线 l 方程为 $y = kx + t$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\begin{cases} y = kx + t \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases} \quad \text{联立消 } y \text{ 得 } (4k^2 + 3)x^2 + 8ktx + 4t^2 - 12 = 0,$$

$$\text{则 } \Delta = 64k^2t^2 - 4(4t^2 - 12)(3 + 4k^2) > 0,$$

$$\text{得 } 4k^2 + 3 > t^2 \dots \textcircled{1},$$

$$\text{且 } x_1 + x_2 = \frac{-8kt}{3 + 4k^2} = 2, \quad y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) + 2t = \frac{6t}{3 + 4k^2} = 2m,$$

$$\therefore m > 0, \therefore t > 0 \text{ 且 } k < 0.$$

$$\text{且 } t = \frac{3 + 4k^2}{-4k} \dots \textcircled{2}.$$

由①②得 $4k^2 + 3 > \frac{(3+4k^2)^2}{16k^2}$,

$\therefore k > \frac{1}{2}$ 或 $k < -\frac{1}{2}$.

$\therefore k < 0$, $\therefore k < -\frac{1}{2}$.

(2) $FP + FA + FB = 0$, $FP + 2FM = 0$,

$\therefore M(1, m)$, $F(1, 0)$, $\therefore P$ 的坐标为 $(1, -2m)$.

由于 P 在椭圆上, $\therefore \frac{1}{4} + \frac{4m^2}{3} = 1$, $\therefore m = \frac{3}{4}$, $M(1, -\frac{3}{2})$,

又 $\frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{3} = 1$, $\frac{x_2^2}{4} + \frac{y_2^2}{3} = 1$,

两式相减可得 $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}$,

又 $x_1 + x_2 = 2$, $y_1 + y_2 = \frac{3}{2}$, $\therefore k = -1$,

直线 l 方程为 $y - \frac{3}{4} = -(x - 1)$,

即 $y = -x + \frac{7}{4}$,

$\therefore \begin{cases} y = -x + \frac{7}{4} \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$,

消去 y 得 $28x^2 - 56x + 1 = 0$, $x_{1,2} = \frac{14 \pm 3\sqrt{21}}{14}$,

$|FA| + |FB| = \sqrt{(x_1 - 1)^2 + y_1^2} + \sqrt{(x_2 - 1)^2 + y_2^2} = 3$,

$|FP| = \sqrt{(1 - 1)^2 + (-\frac{3}{2} - 0)^2} = \frac{3}{2}$,

$\therefore |FA| + |FB| = 2|FP|$.

$\therefore |FA|, |FP|, |FB|$ 成等差数列,

$2d = \pm ||FA| - |FB|| = \pm |a - \frac{c}{a}x_1 - a + \frac{c}{a}x_2| = \pm \frac{c}{a} |x_1 - x_2|$
 $= \pm \frac{1}{2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{4 - \frac{1}{7}} = \pm \frac{3\sqrt{21}}{14}$. $\therefore d = \pm \frac{3\sqrt{21}}{28}$.

16. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x} - x + a \ln x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 , 证明: $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$.

解答: (1) ① $\because f(x) = \frac{1}{x} - x + a \ln x$, $\therefore f'(x) = -\frac{x^2 - ax + 1}{x^2}$, $\therefore$ 当 $-2 \leq a \leq 2$ 时,

$\Delta \leq 0$, $f'(x) \leq 0$, $\therefore$ 此时 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为单调递增.

② $\because \Delta > 0$, 即 $a < -2$ 或 $a > 2$, 此时方程 $x^2 - ax + 1 = 0$ 两根为

$x_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}$, $x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$, 当 $a < -2$ 时, 此时两根均为负, $\therefore f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上

单调递减. 当 $a > 2$ 时, $\Delta > 0$, 此时 $f(x)$ 在 $(0, \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2})$ 上单调递减, $f(x)$ 在

$(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2})$ 上单调递增, $f(x)$ 在 $(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, +\infty)$ 上单调递减. $\therefore$ 综上可

得, $a \leq 2$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减; $a > 2$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2})$,

$(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, +\infty)$ 上单调递减, $f(x)$ 在 $(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2})$ 上单调递增.

(2) 由 (1) 可得, $x^2 - ax + 1 = 0$ 两根 x_1, x_2 得 $a > 2$, $x_1 + x_2 = a$, $x_1 \cdot x_2 = 1$, 令

$0 < x_1 < x_2$, $\therefore x_1 = \frac{1}{x_2}$, $f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{x_1} - x_1 + a \ln x_1 - (\frac{1}{x_2} - x_2 + a \ln x_2)$

$= 2(x_2 - x_1) + a(\ln x_1 - \ln x_2)$. $\therefore \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = -2 + a \cdot \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2}$, 要证

$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$ 成立, 即要证 $\frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} < 1$ 成立, $\therefore \frac{\ln \frac{x_1}{x_2} - x_1 + x_2}{x_1 - x_2} < 0 (x_2 > 1)$,

$\therefore \frac{-2 \ln x_2 - \frac{1}{x_2} + x_2}{x_1 - x_2} < 0$

即要证 $-2 \ln x_2 - \frac{1}{x_2} + x_2 > 0 (x_2 > 1)$

令 $g(x) = -2 \ln x - \frac{1}{x} + x (x > 1)$, 可得 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上为增函数, $\therefore g(x) > g(1) = 0$, $\therefore$

$\frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} < 1$ 成立, 即 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$ 成立.