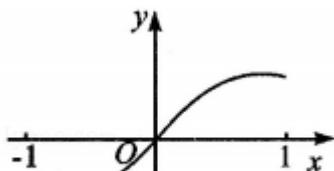


# 江苏省仪征中学 2022 届高三数学寒假作业（1）

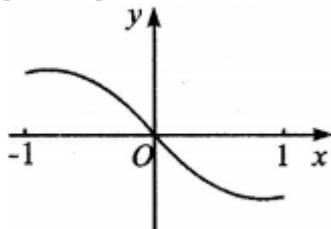
班级 \_\_\_\_\_ 姓名 \_\_\_\_\_ 学号 \_\_\_\_\_ 无谓丢分 \_\_\_\_\_.

一、单项选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共计 40 分.每小题给出的四个选项中,只有一个选项是正确的.请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上.

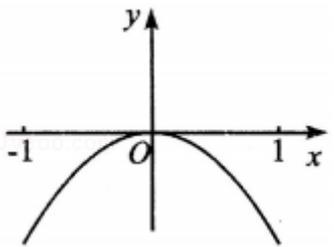
1. 已知集合  $A = \{x|x^2 - 2x < 0\}$ ,  $B = \{x|x - 1 \geq 0\}$ , 则集合  $A \cap B =$  ( )  
 A.  $\{x|0 < x < 2\}$       B.  $\{x|0 < x \leq 1\}$       C.  $\{x|x \geq 1\}$       D.  $\{x|1 \leq x < 2\}$
2. 若复数  $z_1$  对应复平面内的点  $(2, -3)$ , 且  $z_1 \cdot z_2 = 1+i$ , 则复数  $z_2$  的虚部为 ( )  
 A.  $-\frac{5}{13}$       B.  $\frac{5}{13}$       C.  $-\frac{1}{13}$       D.  $\frac{1}{13}$
3. 在  $(2x+a)^5$  (其中  $a \neq 0$ ) 的展开式中,  $x^2$  的系数与  $x^3$  的系数相同, 则  $a$  的值为 ( )  
 A.  $\pm \frac{1}{2}$       B.  $\frac{1}{2}$       C.  $-2$       D.  $2$
4. 已知  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  均为单位向量, 若  $\vec{b} \perp (2\vec{a} + \vec{b})$ , 则  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的夹角为 ( )  
 A.  $30^\circ$       B.  $45^\circ$       C.  $60^\circ$       D.  $120^\circ$
5. 已知  $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4}) = -3$ , 则  $\sin 2\alpha =$  ( )  
 A.  $\frac{4}{5}$       B.  $\frac{2}{5}$       C.  $-\frac{4}{5}$       D.  $-\frac{4\sqrt{5}}{5}$
6. 函数  $f(x) = \cos x \cdot \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$  在  $[-1, 1]$  的图象大致为 ( )



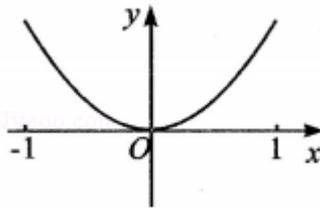
A.



B.



C.



D.

7. 若直线  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 过点  $(2, 1)$ , 则  $2a+b$  的最小值为 ( )  
 A. 10      B. 9      C. 8      D. 6
8. 已知  $A_1, A_2$  分别是双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  的左, 右顶点,  $F$  为左焦点, 以  $A_1A_2$  为直径的圆与双曲线  $C$  的两条渐近线在  $x$  轴上方, 从左至右依次交于  $M, N$  两点, 若  $FM \parallel ON$ , 则该双曲线的离心率为 ( )  
 A.  $\sqrt{2}$       B. 2      C.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$       D.  $\frac{\sqrt{6}}{2}$

二、多项选择题:本大题共 4 小题,每小题 5 分, 共计 20 分. 每小题给出的四个选项中, 都有多个选项是正确的, 全部选对的得 5 分, 选对但不全的得 2 分, 选错或不答的得 0 分, 请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上.

9. “一带一路”是“丝绸之路经济带”和“21 世纪海上丝绸之路”的简称, 旨在积极发展我国与沿线国家经济合作关系, 共同打造政治互信、经济融合、文化包容的命运共同体. 自 2013 年以来, “一

“一带一路”建设成果显著如图是 2013 - 2017 年，我国对“一带一路”沿线国家进出口情况统计图，下列描述正确的是（ ）



- A. 这五年，2013 年出口额最少
  - B. 这五年，出口总额比进口总额多
  - C. 这五年，出口增速前四年逐年下降
  - D. 这五年，2017 年进口增速最快
10. 关于函数  $f(x) = 3\sin(2x - \frac{\pi}{3}) + 1$  ( $x \in \mathbf{R}$ )，下列命题正确的是（ ）
- A. 由  $f(x_1) = f(x_2) = 1$  可得  $x_1 - x_2$  是  $\pi$  的整数倍
  - B.  $y = f(x)$  的表达式可改写成  $f(x) = 3\cos(2x - \frac{5\pi}{6}) + 1$
  - C.  $y = f(x)$  的图象关于点  $(\frac{3\pi}{4}, 1)$  对称
  - D.  $y = f(x)$  的图象关于直线  $x = -\frac{\pi}{12}$  对称
11. 设抛物线  $C: y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 的焦点为  $F$ ，准线为  $l$ ， $A$  为  $C$  上一点，以  $F$  为圆心， $|FA|$  为半径的圆交  $l$  于  $B, D$  两点. 若  $\angle ABD = 90^\circ$ ，且  $\triangle ABF$  的面积为  $9\sqrt{3}$ ，则（ ）
- A.  $|BF| = 3$
  - B.  $\triangle ABF$  是等边三角形
  - C. 点  $F$  到准线的距离为 3
  - D. 抛物线  $C$  的方程为  $y^2 = 6x$
12. 已知三棱锥  $A - BCD$  中， $BC \perp CD$ ， $AB = AD = \sqrt{2}$ ， $BC = 1$ ， $CD = \sqrt{3}$ ，则（ ）
- A. 三棱锥的外接球的体积为  $\frac{4\pi}{3}$
  - B. 三棱锥的外接球的体积为  $\frac{8\pi}{3}$
  - C. 三棱锥的体积的最大值为  $\frac{\sqrt{3}}{6}$
  - D. 三棱锥的体积的最大值为  $\sqrt{3}$

三、填空题:本大题共 4 小题， 每小题 5 分，若两个空，第一个空 2 分，第二个空 3 分，共计 20 分. 请把答案填写在答题卡相应的位置上.

13. 设函数  $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$ ，若  $f(\alpha) = 9$ ，则  $\alpha =$ \_\_\_\_\_.
14. 成都市某次高三统考，成绩  $X$  经统计分析，近似服从正态分布  $X \sim N(100, \sigma^2)$ ，且  $P(86 < X \leq 100) = 0.15$ ，若该市有 8000 人参考，则估计成都市该次统考中成绩  $X$  大于 114 分的人数为\_\_\_\_\_.
15. 已知直线  $l: y = kx$  被圆  $C: (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$  截得的弦长为  $2\sqrt{3}$ ，则  $k =$ \_\_\_\_\_，圆  $C$  上到直线  $l$  的距离为 1 的点有\_\_\_\_\_个.
16. 对于数列  $\{a_n\}$ ，定义  $H_n = \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + 2^{n-1}a_n}{n}$  为  $\{a_n\}$  的“优值”，现已知某数列的“优值” $H_n = 2^n$ ，记数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，则  $\frac{S_{2019}}{2019} =$ \_\_\_\_\_.

四、解答题:本大题共 6 小题, 共计 70 分. 请在答题卡指定区域内作答. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 在① $\cos A = \frac{3}{5}$ ,  $\cos C = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ , ② $c \sin C = \sin A + b \sin B$ ,  $B = 60^\circ$ , ③ $c = 2$ ,  $\cos A = \frac{1}{8}$ 三个条件中任选一个补充在下面问题中, 并加以解答.

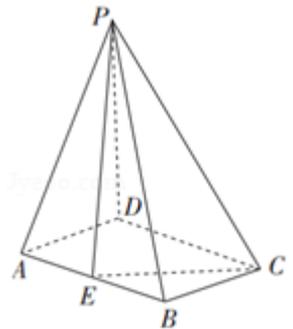
已知 $\triangle ABC$ 的内角 $A, B, C$ 的对边分别为 $a, b, c$ , 若 $a = 3$ , \_\_\_\_\_, 求 $\triangle ABC$ 的面积 $S$ .

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

18. 如图, 四棱锥  $P - ABCD$  的底面是正方形,  $E$  为  $AB$  的中点,  $PD \perp CE$ ,  $AE = 1$ ,  $PD = 3$ ,  $PC = \sqrt{13}$ .

(1) 证明:  $AD \perp$  平面  $PCD$ .

(2) 求  $DA$  与平面  $PCE$  所成角的正弦值.



19. 某土特产超市为预估 2020 年元旦期间游客购买土特产的情况，对 2019 年元旦期间的 90 位游客购买情况进行统计，得到如下人数分布表.

购买金额 (元)	[0, 15)	[15, 30)	[30, 45)	[45, 60)	[60, 75)	[75, 90]
人数	10	15	20	15	20	10

(1) 根据以上数据完成  $2 \times 2$  列联表，并判断能否在犯错误的概率不超过 0.05 的情况下认为购买金额是否少于 60 元与性别有关.

	不少于 60 元	少于 60 元	合计
男		40	
女	18		
合计			

(2) 为吸引游客，该超市推出一种优惠方案，购买金额不少于 60 元可抽奖 3 次，每次中奖概率为  $p$  (每次抽奖互不影响，且  $p$  的值等于人数分布表中购买金额不少于 60 元的频率)，中奖 1 次减 5 元，中奖 2 次减 10 元，中奖 3 次减 15 元. 若游客甲计划购买 80 元的土特产，请列出实际付款数  $X$  (元) 的分布列并求其数学期望.

附参考公式和数据： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ,  $n=a+b+c+d$ .

附表：

$k_0$	2.072	2.706	3.841	6.635	7.879
$P(K^2 \geq k_0)$	0.150	0.100	0.050	0.010	0.005

20. 在数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  中,  $a_1=b_1=1$ ,  $a_{n+1}=3a_n - b_n - 3n - 1$ ,  $b_{n+1}=3b_n - a_n + 3n + 1$ . 等差数列  $\{c_n\}$  的前两项依次为  $a_2, b_2$ .

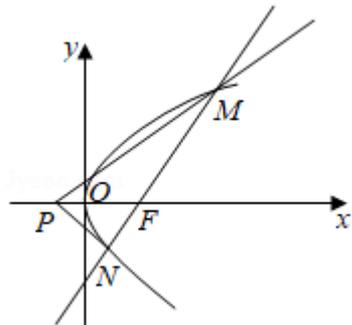
(1) 求  $\{c_n\}$  的通项公式;

(2) 求数列  $\{(a_n+b_n) c_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .

21. 如图, 已知点  $F$  为抛物线  $C: y^2=2px$  ( $p>0$ ) 的焦点, 过点  $F$  的动直线  $l$  与抛物线  $C$  交于  $M$ ,  $N$  两点, 且当直线  $l$  的倾斜角为  $45^\circ$  时,  $|MN|=16$ .

(1) 求抛物线  $C$  的方程.

(2) 试确定在  $x$  轴上是否存在点  $P$ , 使得直线  $PM$ ,  $PN$  关于  $x$  轴对称? 若存在, 求出点  $P$  的坐标; 若不存在, 请说明理由.



22. 已知函数  $f(x) = 2\ln(x+1) + \sin x + 1$ , 函数  $g(x) = ax - 1 - b \ln x$  ( $a, b \in \mathbf{R}, ab \neq 0$ )

(1) 讨论  $g(x)$  的单调性;

(2) 证明: 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) \leq 3x + 1$ .

(3) 证明: 当  $x > -1$  时,  $f(x) < (x^2 + 2x + 2)e^{\sin x}$ .