江苏省仪征中学2022届高三数学三月调研测试热身训练五

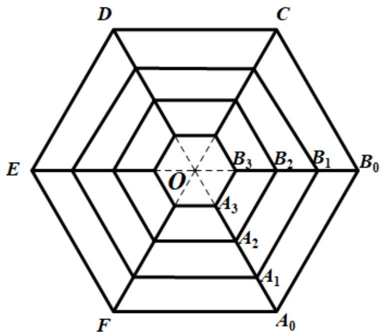
班级__________姓名__________学号__________得分__________

一、单选题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共计 30 分．每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的．

1. 已知$\vec{a},\vec{b}$为单位向量，且$|2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3}$，则$\vec{a},\vec{b}$的夹角为（　　）

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{\pi}{4}$　　D．$\frac{2\pi}{3}$

2. 桥是物质、是精神、是文化，风雨桥是侗族最具特色的建筑之一．风雨桥由桥、塔、亭组成．其亭、塔平面图通常是正方形、正六边形和正八边形．如图是风雨桥亭、塔正六边形的正射影．其正六边形的边长计算方法如下：$A_1B_1=A_0B_0-B_0B_1$，$A_2B_2=A_1B_1-B_1B_2$，$A_3B_3=A_2B_2-B_2B_3$，…，$A_nB_n=A_{n-1}B_{n-1}-B_{n-1}B_n$，其中$B_{n-1}B_n=\cdots=B_2B_3=B_1B_2=B_0B_1,n\in\mathbb{N}^*$．根据每层边长间的规律．建筑师通过推算，可初步估计需要多少材料．所用材料中，横向梁所用木料与正六边形的周长有关．某一风雨桥亭、塔共5层，若$A_0B_0=6$，$B_0B_1=1$．则这五层正六边形的周长总和为（　　）



A．100　　B．110　　C．120　　D．130

3. 随机变量ξ服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，若$P(\xi<2)=0.2$，$P(2<\xi<6)=0.6$，则$\mu=$（　　）

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

4. 在平面直角坐标系xOy中，已知$\triangle ABC$顶点$A(-5,0)$和$B(5,0)$，点C在双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$的右支上，则$\frac{\sin A-\sin B}{\sin C}=$（　　）

A．$\frac{2}{3}$　　B．$-\frac{2}{3}$　　C．$\frac{4}{5}$　　D．$-\frac{4}{5}$

5. 已知函数$g(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{2}\right)(\omega>0)$，把函数$g(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{2\omega}$得到函数$f(x)$的图象，函数$f(x)$在区间$\left[\frac{2\pi}{9},\frac{2\pi}{3}\right]$上单调递减，在$\left[\frac{2\pi}{3},\frac{10\pi}{9}\right]$上单调递增，则$\omega=$（　　）

A．$\frac{3}{4}$　　B．$\frac{9}{4}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{4}{3}$

6. 若存在两个不相等的正实数x，y，使得$m(y-x)+e^y-e^x=0$成立，则实数m的取值范围是（　　）

A．$m<-1$　　B．$m>-1$　　C．$m<1$　　D．$m>1$

二、选择题：本题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

7. 若定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(2-x)$，且当 $x\in[-1,0)$ 时，$f(x)=-2x$，则(　　)

A．$f(x)$ 的最小正周期 $T=4$　　　B．$y=f(x+1)$ 为偶函数

C．$f(x)$ 在 $(3,5)$ 上单调递增　　　D．$f(x)$ 所有零点的集合为 $\{x\,|\,x=2n,n\in Z\}$

8. 抛物线有如下光学性质：由其焦点射出的光线经抛物线反射后，沿平行于抛物线对称轴的方向射出；反之，平行于抛物线对称轴的入射光线经抛物线反射后必过抛物线的焦点，已知抛物线 M：$y^2=x$，O 为坐标原点，一束平行于 x 轴的光线 l_1 从点 $P\left(\frac{41}{16},1\right)$ 射入，经过 M 上的点 $A(x_1,y_1)$ 反射，再经 M 上另一点 $B(x_2,y_2)$ 反射后，沿直线 l_2 射出，经过点 Q，则(　　)

A．$y_1y_2=-\frac{1}{4}$　　　B．$|AB|=\frac{5}{4}$

C．PB 平分 $\angle ABQ$　　　D．延长 AO 交直线 $x=-\frac{1}{4}$ 于点 C，则 C，B，Q 三点共线

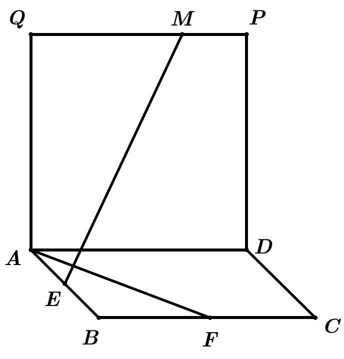
三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

9. 已知复数 z_1，z_2 满足 $|z_1|=|z_2|=|z_1+z_2|=1$，则 $|z_1-z_2|=$__________.

10. 新冠肺炎疫情防控中，核酸检测是新冠肺炎确诊的有效快捷手段.某医院在成为新冠肺炎核酸检测定点医院并开展检测工作的第 n 天，每个检测对象从接受检测到检测报告生成平均耗时 $t(n)$（单位：小时）大致服从的关系为 $t(n)=\begin{cases}\frac{t_0}{\sqrt{n}},n<N_0\\ \frac{t_0}{\sqrt{N_0}},n\ge N_0\end{cases}$（$t_0$，$N_0$ 为常数）.已知第 16 天检测过程平均耗时为 16 小时，第 64 天和第 67 天检测过程平均耗时均为 8 小时，那么可得到第 49 天检测过程平均耗时大致为__________小时.

11. 在平面内将点 $A(1,2)$ 绕原点按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{4}$，得到点 B，则点 B 的坐标为__________.

12. 如图，四边形 $ABCD$ 和 $ADPQ$ 均为正方形，它们所在的平面互相垂直，动点 M 在线段 PQ 上，E、F 分别为 AB、BC 的中点.设异面直线 EM 与 AF 所成 的角为 θ，则 $\cos\theta$ 的最大值为__________.



四、解答题：本题共 4 小题，共 46 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

13. 已知等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，且$S_3=7$，$a_4+a_5+a_6=56$．

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)在数列$\{a_n\}$中的a_i和$a_{i+1}\left(i\in\mathbf{N}^*\right)$之间插入 i 个数m_1，m_2，m_3，……，m_i，使a_i，m_1，m_2，m_3，……，m_i，a_{i+1}成等差数列，这样得到一个新数列$\{b_n\}$，设数列$\{b_n\}$的前 n 项和为T_n，求T_{21}．

14. 在$\triangle ABC$中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且$a=2\sqrt{10}$，$b=5$，$\cos A=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$．

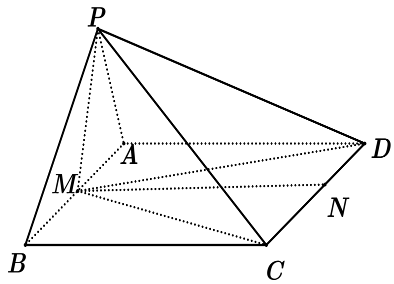
(1)求 B；

(2)设 D 是 AB 边上点，且$AB=3AD$，求证：$CD\perp AB$．

15. 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是平行四边形，$\angle APB=\frac{\pi}{2}$，$\angle ABC=\frac{\pi}{3}$，$PB=2\sqrt{3}$，$2PA=AD=PC=4$，点M是AB的中点，点N是线段CD上的动点.

（1）求证：平面$PCM\perp$平面PAB；

（2）若直线PN与平面PMD所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{6}}{8}$，求$\frac{CN}{ND}$的值.



16. 在平面直角坐标系xOy中，椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>0)$的左右顶点为$A,B$，上顶点$K$满足$\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{KB}=3$.

(1)求C的标准方程;

(2)过点$(1,0)$的直线与椭圆C交于M,N两点. 设直线MA和直线NB相交于点P，直线NA和直线MB相交于点Q，直线PQ与x轴交于S. 证明：$|SP|\cdot|SQ|$是定值.

热身训练五参考答案与评分建议

选择题：

1	2	3	4	5	6	7	8
B	C	B	D	B	A	ABD	ACD

填空题：

9. $\sqrt{3}$　　**10.** $\frac{64}{7}$　　**11.** $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$　　**12.** $\frac{2}{5}$

解答题：

13.（本题满分 10 分）

解：(1)设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q,

$\because S_3=7=a_1+a_2+a_3$， $a_4+a_5+a_6=56$，

$\therefore q^3=8$，即$q=2$，　　…………………………………………………………………2 分

$\therefore a_1+2a_1+4a_1=7$，即$a_1=1$，

$\therefore$数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^{n-1}$.　　…………………………………………………5 分

(2)因为在数列$\{a_n\}$中的a_i和$a_{i+1}$$(i\in \mathbf{N}^*)$之间插入 i 个数，

则在列$\{b_n\}$的前 21 项中，就是在a_1到a_6每两项之间各插入一组数，共插入五组，

数列$\{b_n\}$的前 21 项为$a_1,m_1,a_2,m_2,m_3,a_3,m_4,m_5,m_6,a_4,\cdots$，

$\therefore T_{21}=a_1+m_1+a_2+m_2+m_3+a_3+m_4+m_5+m_6+a_4+\cdots+a_6$　　……………………………7 分

$$=a_1+\frac{a_1+a_2}{2}+a_2+(a_2+a_3)+a_3+\frac{3(a_3+a_4)}{2}+a_4+2(a_4+a_5)+a_5+\frac{5(a_5+a_6)}{2}+a_6$$

$$=1+\frac{1+2}{2}+2+(2+4)+4+\frac{3(4+8)}{2}+8+2(8+16)+16+\frac{5(16+32)}{2}+32$$

$=\frac{513}{2}$.　　……………………………………………………10 分

14.（本题满分 12 分）

解：(1)$\because$在$\triangle ABC$中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，$\cos A=\frac{\sqrt{5}}{5}>0$，

$\therefore \sin A=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，又$a=2\sqrt{10}$，$b=5$，

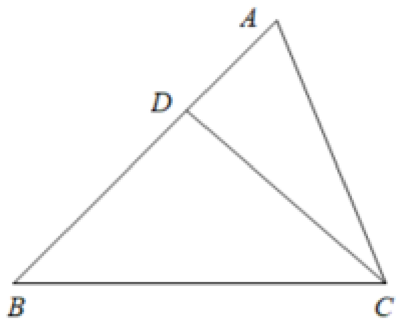
$\therefore \sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{5\times\frac{2\sqrt{5}}{5}}{2\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，　　……………………………………………2 分

又$a=2\sqrt{10}>b=5$，$A>B$，　　……………………………………………4 分

$\therefore B = \frac{\pi}{4}$； ……………………………………………5 分

(2)$\because \sin C = \sin(A+B) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$，

$\therefore c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{2\sqrt{10} \times \frac{3\sqrt{10}}{10}}{\frac{2\sqrt{5}}{5}} = 3\sqrt{5}$， ……………………………………………7 分



$\because \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$， $\left|\overrightarrow{BA}\right| = 3\sqrt{5}, \left|\overrightarrow{BC}\right| = 2\sqrt{10}$， ……………………………………9 分

$\therefore \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BA} = \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}\right) \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}^2 - \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{2}{3} \times \left(3\sqrt{5}\right)^2 - 2\sqrt{10} \times 3\sqrt{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$，

$\therefore CD \perp BA$，

$\therefore CD \perp AB$． ……………………………………………12 分

（其他解法酌情给分）

15.（本题满分 12 分）

解:（1）在$\triangle PAB$中，因为$\angle APB = \frac{\pi}{2}$， $PB = 2\sqrt{3}$， $PA = 2$，所以$AB = 4$．

因为点M是AB的中点，所以$BM = PM = 2$．

在$\triangle BMC$中，$\angle MBC = \frac{\pi}{3}$， $BM = 2$， $BC = 4$，

由余弦定理，有$CM = 2\sqrt{3}$，所以$BM^2 + CM^2 = BC^2$，

所以$AB \perp CM$． ……………………………………………2 分

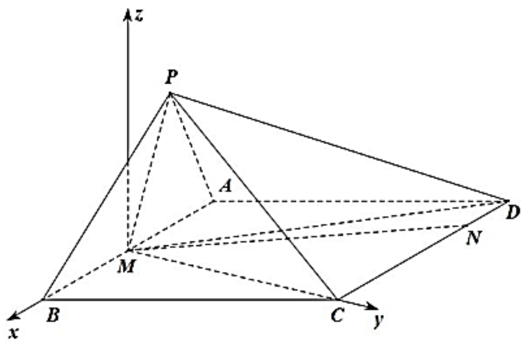
在$\triangle PMC$中， $PM = 2$， $CM = 2\sqrt{3}$， $PC = 4$，满足$PC^2 = CM^2 + PM^2$，所以$PM \perp CM$．

而$AB \cap PM = M$，所以$CM \perp$平面PAB．

因为$CM \subset$平面PCM，所以平面$PCM \perp$平面PAB． ……………………………………5 分

（2）如图，以点M为坐标原点，建立空间直角坐标系，有$M(0,0,0)$，$C\left(0,2\sqrt{3},0\right)$，$D\left(-4,2\sqrt{3},0\right)$.

设$P(x_P,0,z_P)$，$N\left(-\lambda,2\sqrt{3},0\right)\left(\lambda\in[0,4]\right)$，……………………………………………………6 分



平面PMD的一个法向量为$\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，直线PN与平面PMD所成角为θ.

在$\triangle PAB$中，$z_P=\dfrac{PA\cdot PB}{AB}=\sqrt{3}$，而$PM=2$，得$x_P=-1$，所以$P\left(-1,0,\sqrt{3}\right)$. ………………7 分

因为$\overrightarrow{MP}=\left(-1,0,\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{MD}=\left(-4,2\sqrt{3},0\right)$，$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{MP}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{MD}=0\end{cases}$，

所以$\vec{m}=\left(\sqrt{3},2,1\right)$. ……………………………………………………9 分

因为$\overrightarrow{PN}=\left(1-\lambda,2\sqrt{3},-\sqrt{3}\right)$，所以$\sin\theta=\left|\cos\left\langle\vec{m},\overrightarrow{PN}\right\rangle\right|=\dfrac{\vec{m}\cdot\overrightarrow{PN}}{|\vec{m}|\cdot\left|\overrightarrow{PN}\right|}=\dfrac{4\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{\lambda^2-2\lambda+16}}=\dfrac{\sqrt{6}}{8}$，

得$\lambda^2-10\lambda+16=0$，所以$\lambda=2$或$\lambda=8$（舍）. ……………………………………………………11 分

所以$\dfrac{CN}{ND}=1$. ……………………………………………………12 分

16.（本题满分 12 分）

解：(1)由题，$A(-a,0),B(a,0),K(0,1),\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{KB}=a^2-1=3$，解得$a=2$.

所以C的标准方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………………………4 分

(2)设$M(x_M,y_M),N(x_N,y_N)$，直线MN的方程为$x=my+1$.

联立直线与椭圆的方程，消x得$\left(m^2+4\right)y^2+2my-3=0$，

从而由韦达定理得$y_M+y_N=-\dfrac{2m}{m^2+4},y_My_N=-\dfrac{3}{m^2+4}$. ……………………………………6 分

由(1)知$A(-2,0),B(2,0)$，所以直线MA和NB的方程分别为

$MA: y=\frac{y_M}{x_M+2}(x+2)=\frac{y_M}{my_M+3}(x+2)$

$NB: y=\frac{y_N}{x_N-2}(x-2)=\frac{y_N}{my_N-1}(x-2)$

联立直线MA和NB，可得交点P的横坐标x_P满足

$\frac{x_P+2}{x_P-2}=\frac{my_My_N+3y_N}{my_My_N-y_M}=\frac{-3m-6m-3\left(m^2+4\right)y_M}{-3m-\left(m^2+4\right)y_M}=3$，解得$x_P=4$，

即P点总在直线$x=4$上．同理可得Q点也在直线$x=4$上，

所以直线PQ的方程为$x=4$． …………………………………9分

$S(4,0)$，所以$|SP|\cdot|SQ|=\left|y_Py_Q\right|$，其中$y_P,y_Q$分别为点$P$，点$Q$的纵坐标．

联立直线MA和直线$x=4$，得$y_P=\frac{6y_M}{my_M+3}$；

联立直线MB和直线$x=4$，得$y_Q=\frac{6y_N}{my_N+3}$．

所以$\left|y_Py_Q\right|=\left|\frac{36y_My_N}{m^2y_My_N+3m\left(y_M+y_N\right)+9}\right|=\left|\frac{36\times(-3)}{-3m^2-6m^2+9\left(m^2+4\right)}\right|=3$为定值．………………12分