

聚焦多维视角分析 优化高三复习策略*

●李 刚 (木渎高级中学,江苏 苏州 215100)

摘 要: 文章对一道模考试题进行分析,从不同的视角选择不同的方法进行处理,实现对问题多方面、多角度、多层次的思考,然后进行归类总结.通过类比两个高考试题,给出高效备考的一些策略,通过相关变式,理清体系和脉络,实现从“会一道题”到“会一类题”,从而提高复习的效率.

关键词: 高三数学;解题视角;复习策略

中图分类号: O123.1

文献标识码: A

文章编号: 1003-6407(2020)10-0019-04

笔者通过对很多模考题和高考题进行分析后发现:这些试题与教材中的例题或往年的高考试题有着千丝万缕的联系,这些试题往往是由一些经典问题改编延伸而来.因此,在高三复习阶段,要重温教材,充分挖掘教材中的典型题目,研究历年高考试题,把握命题方向.下面笔者以一道模考试题为例,分析条件,从不同解题视角进行解法探究.再结合两个高考试题,谈谈在高三备考复习中需要关注的问题.

1 考题再现

例 1 如图 1,在 $\triangle ABC$ 中, $AB=4$, D 是 AB 的中点, E 在边 AC 上, $AE=2EC$, CD 与 BE 交于点 O . 若 $OB=\sqrt{2}OC$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值是_____.

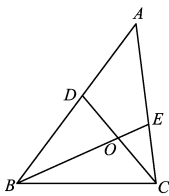


图 1

(2020 年江苏省苏州、无锡、常州、镇江一模数学试题第 14 题)

从考查知识角度分析,本题主要考查解三角形、平面向量、阿波罗尼斯圆、函数与导数等相关知识;从考查思想方法角度分析,重点考查学生的等价转化、数形结合等数学思想;从考查素养角度分析,重点考查直观想象、逻辑推理等核心素养.

2 解题视角

处理三角形问题,通常可以合理选择变量,利用余弦定理构造边与角的等量关系,通过合理消元,构建面积与边或角的函数关系.

视角 1 边化角.

首先可以证明 O 为 CD 的中点,方法如下:

证法 1 (向量角度) 设 $\vec{CO}=\lambda\vec{CD}$ (其中 $0<\lambda<$

1), 因为 D 是 AB 的中点, 所以

$$\vec{CO}=\frac{\lambda}{2}\vec{CA}+\frac{\lambda}{2}\vec{CB}.$$

又因为点 E 在边 AC 上且 $AE=2EC$, 所以

$$\vec{CO}=\frac{\lambda}{2}\vec{CA}+\frac{\lambda}{2}\vec{CB}=\frac{3\lambda}{2}\vec{CE}+\frac{\lambda}{2}\vec{CB}.$$

设 $\vec{BO}=\mu\vec{BE}$ (其中 $0<\mu<1$), 同理可得

$$\vec{CO}=\mu\vec{CE}+(1-\mu)\vec{CB},$$

由平面向量基本定理可得

$$\begin{cases} \frac{3}{2}\lambda=\mu, \\ \frac{1}{2}\lambda=1-\mu, \end{cases}$$

解得 $\lambda=\frac{1}{2}$, $\mu=\frac{3}{4}$, 因此 O 为 CD 的中点且 O 为 BE 的四等分点.

证法 2 (几何角度) 如图 2, 过点 D 作 $DF\parallel BE$ 交 AC 于点 F . 因为 D 是 AB 的中点, 所以 F 是 AE 的中点. 又因为 E 在边 AC 上且 $AE=2EC$, 所以 $CE=EF$, 即 E 为 CF 的中点. 由 $DF\parallel OE$ 可知 O 为 CD 的中点.

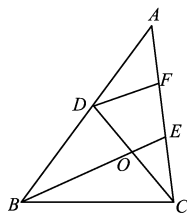


图 2

接着可求 $\triangle ABC$ 面积的最大值:

方法 1 设 $OD=x$, 则 $OC=x$, 因为 $OB=\sqrt{2}OC$, 所以 $OB=\sqrt{2}x$. 设 $\angle BOD=\alpha$, 从而

$$S_{\triangle ABC}=4S_{\triangle BOD}=2\sqrt{2}x^2\sin\alpha.$$

在 $\triangle BOD$ 中, 由余弦定理得

* 收文日期:2020-04-17;修订日期:2020-05-18

作者简介:李 刚(1983—),男,江苏苏州人,中学一级教师.研究方向:数学教育.

$$\cos \alpha = \frac{3x^2 - 4}{2\sqrt{2}x^2},$$

$$\text{于是 } \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{-x^4 + 24x^2 - 16}}{2\sqrt{2}x^2},$$

$$\text{因此 } S_{\triangle ABC} = 2\sqrt{2}x^2 \sin \alpha = \sqrt{-x^4 + 24x^2 - 16} = \sqrt{-(x^2 - 12)^2 + 128},$$

$$\text{当 } x = 2\sqrt{3} \text{ 时, } (S_{\triangle ABC})_{\max} = 8\sqrt{2}.$$

视角2 角化边.

方法2 由方法1可知

$$S_{\triangle ABC} = 4S_{\triangle BOD} = 2\sqrt{2}x^2 \sin \alpha,$$

$$\text{且 } \cos \alpha = \frac{3x^2 - 4}{2\sqrt{2}x^2}.$$

$$\text{由 } \cos \alpha = \frac{3x^2 - 4}{2\sqrt{2}x^2}, \text{ 得}$$

$$x^2 = \frac{4}{3 - 2\sqrt{2} \cos \alpha},$$

$$\text{因此 } S_{\triangle ABC} = \frac{8\sqrt{2} \sin \alpha}{3 - 2\sqrt{2} \cos \alpha}.$$

对于上述函数表达式,可从“三角函数导数”“利用辅助角公式结合三角函数的有界性”以及“通过构造斜率然后利用直线与圆的位置关系”这3个解题角度处理,此处从略.

上述两个解题视角都是直接结合题意及图形,从解三角形角度切入处理.如果在解题时,基本功扎实,运算过关,那么基本能求出正确结果.

当然,如果对题意深入挖掘,分析条件 $AB = 4$ 以及 $OB = \sqrt{2}OC$,隐含了平面上两点间的距离.在解题视角1中得到的 O 为 CD 中点且 O 为 BE 四等分点的结果思考,可以得到以下解题视角.

视角3 建系构造“隐圆”.

方法3 如图3,以 BA 所在直线为 x 轴、 BA 的垂直平分线为 y 轴建立平面直角坐标系,则 $B(-2,0), A(2,0)$.

由方法1可得 O 为 CD 的中点. 设 $C(x_0, y_0)$ (其中 $y_0 \neq 0$), 则 $O\left(\frac{1}{2}x_0, \frac{1}{2}y_0\right)$. 因为 $OB = \sqrt{2}OC$,

所以

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}x_0 + 2\right)^2 + \left(\frac{1}{2}y_0\right)^2} =$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2}x_0 - x_0\right)^2 + \left(\frac{1}{2}y_0 - y_0\right)^2},$$

整理得 $(x_0 - 4)^2 + y_0^2 = 32$ (其中 $y_0 \neq 0$).

即点 C 在圆心为 $(4,0)$ 、半径为 $4\sqrt{2}$ 的圆(除去与 x 轴的两个交点)上运动,从而

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot h \leq 2r = 8\sqrt{2},$$

于是 $(S_{\triangle ABC})_{\max} = 8\sqrt{2}$.

方法4 由方法1

可知 O 为 CD 的中点且 O 为 BE 的四等分点,由 $OB = \sqrt{2}OC$ 及 O 为 CD 中点可得 $OB = \sqrt{2}OD$.

因为 $BD = 2$, 所以原问题可转化为阿波罗尼斯

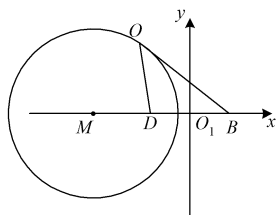


图4

圆. 如图4,以 DB 所在直线为 x 轴、 DB 的垂直平分线为 y 轴建立平面直角坐标系,则 $D(-1,0), B(1,0)$. 设 $O(x_0, y_0)$ (其中 $y_0 \neq 0$), 由 $OB = \sqrt{2}OD$ 可得

$$\sqrt{(x_0 - 1)^2 + y_0^2} = \sqrt{2} \sqrt{(x_0 + 1)^2 + y_0^2},$$

化简得 $(x_0 + 3)^2 + y_0^2 = 8$ (其中 $y_0 \neq 0$).

即点 O 在圆心为 $M(-3,0)$ 、半径为 $2\sqrt{2}$ 的圆(除去与 x 轴的两个交点)上运动,从而

$$S_{\triangle OBD} = \frac{1}{2}DB \cdot h \leq 2r = 2\sqrt{2},$$

于是 $(S_{\triangle ABC})_{\max} = 4(S_{\triangle OBD})_{\max} = 8\sqrt{2}$.

对上述问题的解决,从解法上来说是一题多解,但从实质上进行分析,是从不同的问题角度进行思考分析,去发现问题、提出问题、分析问题和解决问题的一个过程.通过不同视角的分析,一般地,在解决此类三角形面积最值问题时,可以从下面的导图(图5)出发,探寻思路.

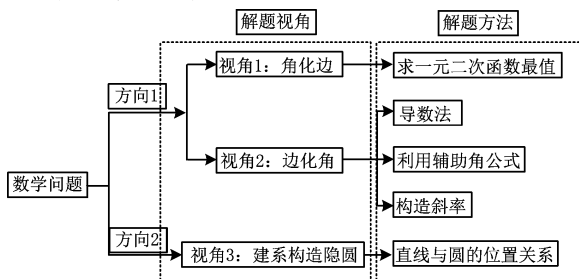


图5

例1无论是命题的背景还是从解题的方法分析,与以下两道高考试题有着密切的联系.

例2 若 $AB=2, AC=\sqrt{2}BC$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值是_____.

(2008年江苏省数学高考试题第13题)

例3 如图6, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 的中点, E 在边 AB 上, $BE=2EA$, AD 与 CE 交于点 O .

若 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 6\vec{AO} \cdot \vec{EC}$, 则

$\frac{AB}{AC}$ 的值是_____.

(2019年江苏省数学高考试题第12题)

从命题构图角度分析, 例1是例2的拓展延伸; 从解法探究角度分析, 和例3的解题方法有异曲同工之妙. 因此, 在备考阶段, 要能够透视高考命题信息, 把握高考命题方向, 科学高效地做好备考复习工作.

3 备考策略

3.1 夯实基础, 把握本质

从阅卷情况来看, 例1的阅卷均分为0.3分(本题满分5分), 可以说是非常低的. 究其原因, 主要还是在思维上的障碍, 导致障碍发生的关键因素还是对基础知识、基本方法、基本技能的掌握不到位. 因此, 在复习中要避免过分依赖教辅, 应当立足教材, 紧扣考题, 掌握通法, 把握本质. 比如本题虽然是填空压轴题, 具有区分度, 但其解题方法仍然是常规方法, 在复习中肯定是常有渗透, 其本质就是把三角问题转化为函数问题或者隐圆问题. 特别地, 当涉及最值问题时, 常规的想法就是引入变量构造函数或者不等式; 图形问题代数化是解析几何的本质. 在复习中, 教师要引导学生夯实基础, 弄清、弄懂知识的数学本质, 掌握基本解题技能, 培养数学核心思维, 如此相关问题是并不难解决的.

3.2 突出变式, 提高能力

“变式教学”是高三复习常用的教学手段之一, 是提高复习效率的有效保证. 当获得一系列基本解法后, 可以通过改变题目的条件或者设问的方式, 强化对知识和方法的理解、掌握与变通, 加深对问题多方面、多角度、多层次的思考. 这样, 通过变式把问题进行深化、拓展, 通过变式把相关的问题变成一个系列和一个主题, 通过变式把原本单一的、离散的问题串成一个题组和一个整体.

例如, 可以对上述3个例题做如下的变式:

变式1 如图6, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 的中点, E 在边 AB 上, $BE=2EA$, AD 与 CE 交于点 O . 若 $\triangle ABC$ 的面积为12, 则 $\triangle AOC$ 的面积等于_____.

变式2 如图6, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 的中点, E 在边 AB 上, $BE=2EA$, AD 与 CD 交于点 O . 若 $AB=2, AC=1, \vec{AB} \cdot \vec{AC}=1$, 则 $\vec{AO} \cdot \vec{EC}$ 的值等于_____.

变式3 如图7, 在 $\triangle ABC$ 中, $AC=\frac{3}{2}BC$, D 在边 AB 上且 $DC=2AD$, E 是 BC 的中点. 若 AE 与 BD 交于点 O , 则 $\frac{CO}{AB}$ 的取值范围是_____.

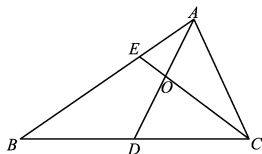


图6

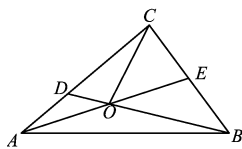


图7

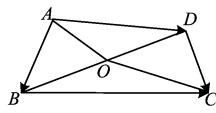


图8

变式4 如图8, 在平面四边形 $ABCD$ 中, O 为 BD 的中点, 且 $OA=3, OC=5$. $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = -7$, 则 $\vec{BC} \cdot \vec{DC}$ 的值等于_____.

变式5 如图9, 在 $\triangle OBC$ 中, 已知 A 是 BC 的中点, D 是 OB 上一点, 且 $\vec{OD} = 2\vec{DB}$, DC 和 OA 交于点 E . 若 $\vec{OE} = \lambda \vec{OA}$, 则实数 λ 的值为_____.

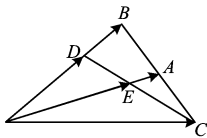


图9

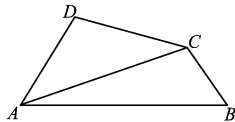


图10

变式6 如图10, 在平面四边形 $ABCD$ 中, $AB=4, AD=2, \angle DAB=60^\circ, AC=3BC$, 则边 CD 长的最小值为_____.

变式7 已知 $\triangle ABC$ 的面积为3, 且 $AB=AC$, 若 $\vec{CD} = 2\vec{DA}$, 则 BD 的最小值为_____.

通过变式教学, 不仅可以帮助学生巩固掌握知识, 更可以让学生体会数学思想, 帮助学生深刻认识数学的本质特征. 对教材提供的经典问题以及对经典高考题的改编, 是高三复习的一条正确之路.

3.3 串讲激活, 构建网络

高三二轮复习是在学生已经掌握了基础知识、基本方法, 已经具备了基本能力的基础上展开的,

(下转第22页)

概念背后的“背后”^{*}

——以“无理数”教学为例

●何君青 (致远初级中学,江苏南京 210019)

摘要:无限不循环小数称为无理数,这与有理数的定义并不统一.学生对无理数这一概念或许是认知上接受,而心理上并未接受.若将有理数用小数来诠释,这样就可以与无理数的概念统一起来,认识到无理数和有理数概念间的区别和联系,对理解这两者大有裨益.

关键词:有理数;无理数;教学实践;数学价值

中图分类号:012

文献标识码:A

文章编号:1003-6407(2020)10-0022-06

任何一个数学概念,都有它产生的背景,这些背景便于我们了解它的来龙去脉,让我们感受到它的合情合理.概念如何理解,这是一个永恒的话题,我们常常研究某一概念的内涵和外延,以此去了解

每一个概念的背后,但是概念的背后还常常有我们不知道的很多“背后”,这依然需要我们的思考与探索.前不久,笔者开设的一节“无理数”展示课,其背后的思考颇多,撰文与读者交流.

(上接第21页)

复习的重点落在了知识间的综合运用上.因此,需要精选典题,以一条明显的逻辑主线串联起相关的知识、方法、思想,帮助学生构建清晰的知识体系和思维脉络,把握一类问题的本质和通法.

例如,有这样一个经典题:

例4 已知 $\triangle ABC$ 为等腰三角形, $AB=AC$, D 是 AC 的中点,且 $BD=3$,求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

本题的内涵非常丰富,从知识的角度进行分析,可以串联起正余弦定理、函数与导数、基本不等式、阿波罗尼斯圆等知识;从培养素养的角度分析,重点培养学生观察分析、抽象概括、转化化归等能力.可以通过这样一个经典问题设计复习专题,具体可以参见文献[1].通过方法串讲,达到激活思维、有效培育“四能”、提升数学核心素养的目的.此外,本题也是例2重要的命题来源.

3.4 关注思维,提升素养

《普通高中数学课程标准(2017年版)》强调教师应注重学生核心素养的培养,倡导独立思考、自主学习、合作交流的学习模式,并在教育过程中强调重视过程性评价,促进学生在不同的学习阶段数学核心素养水平的达成.高三阶段主要任务是复习,在这一年内,学生将经历一轮、二轮复习,基本

上天天在做题,通过训练,学生的解题速度得到了一定的提高,但如果一味地追求做题,忽视在复习过程中对学生思维能力的培养,最后可能出现的情况是高考下来,感觉三年高中数学“白学”了.数学离不开思维,因此,在高三复习中,教师要根据学生的认知规律和思维特点,精选典题,潜心研究教材内容的呈现方式,通过复习不断发展学生数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析能力,培养学生的“四能”.关注学生数学思维能力的提高,能够灵活运用所学知识解决综合问题.

在高考复习备考中,要注意回归经典问题,注意回归教材、挖掘教材例题,研究、分析历年高考题,把握命题规律.通过复习,以点带面,进行多维视角分析,从会做一个题到会做一类题、一串题,真正做到以不变应万变.

参考文献

- [1] 吴锬.转化问题视角 有效培育“四能”:以微专题“一个三角形面积问题的激活与串讲”为例[J].数学通报,2018,57(10):35-43.

* 收文日期:2020-02-28;修订日期:2020-03-28

基金项目:江苏省教育科学“十三五”规划2020年度立项课题(D/2020/02/67)

作者简介:何君青(1987—),男,江苏南京人,中学一级教师.研究方向:数学教育.