

## 第 2.1 节 函数初步

### 2.1.1 周期性与对称性

#### 一、简单的周期问题

##### 常见周期函数模型 I

1. 对任意的  $x \in \mathbb{R}$ , 若  $f(x+a) + f(x) = c$  ( $c$  为常数), 则  $T =$  \_\_\_\_\_.
2. 对任意的  $x \in \mathbb{R}$ , 若  $f(x+a) \cdot f(x) = c$  ( $c$  是不为零的常数), 则  $T =$  \_\_\_\_\_.
3. 对任意的  $x \in \mathbb{R}$ , 若  $f(x) = f(x+a) - f(x+2a)$ , 则  $T =$  \_\_\_\_\_.
4. 对任意的  $x \in \mathbb{R}$ , 若  $f(x+a) = \frac{1-f(x)}{1+f(x)}$ , 则  $T =$  \_\_\_\_\_.

1. 设  $f(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上以 2 为周期的偶函数, 当  $x \in [0, 1]$  时,  $f(x) = \log_2(x+1)$   
则当  $x \in [1, 2]$  时,  $f(x) =$  \_\_\_\_\_.

简要答案  $\log_2(3-x)$

2. (16 山东理 9) 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbb{R}$ , 当  $x < 0$  时,  $f(x) = x^3 - 1$ ; 当  $-1 \leq x \leq 1$  时,  $f(-x) = -f(x)$ ; 当  $x > \frac{1}{2}$  时,  $f\left(x + \frac{1}{2}\right) = f\left(x - \frac{1}{2}\right)$ , 则  $f(6) =$  ( )  
A. -2                      B. 1                      C. 0                      D. 2

简要答案 D

## 二、函数的对称性

### 函数的对称性

1. 对任意的  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x)$  满足  $f(x+a) = f(a-x)$ , 你能得出什么结论?
2. 对任意的  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x)$  满足  $f(x+a) = -f(a-x)$ , 你能得出什么结论?
3.  $f(x+A) = f(B-x) \Leftrightarrow f(x)$  的图像关于\_\_\_\_\_对称.
4.  $f(x+A) = -f(B-x) + C \Leftrightarrow f(x)$  的图像关于\_\_\_\_\_对称.

3. 函数  $f(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2}$  的对称中心为\_\_\_\_\_.

简要答案  $\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$

4. (16 年全国 II 理 12) 已知函数  $f(x) (x \in \mathbb{R})$  满足  $f(-x) = 2 - f(x)$ ,  
若函数  $y = \frac{x+1}{x}$  与  $y = f(x)$  图像的交点为  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$ , 则  $\sum_{i=1}^m (x_i + y_i) =$  ( )

A. 0                      B.  $m$                       C.  $2m$                       D.  $4m$

简要答案 B

### 三、函数的对称性与周期性

#### 常见周期函数模型 II

1. 如果  $f(x)$  关于  $x=a$  和  $x=b$  对称, 则  $T=$ \_\_\_\_\_;
2. 如果  $f(x)$  关于点  $(a,0)$  和点  $(b,0)$  对称, 则  $T=$ \_\_\_\_\_;
3. 如果  $f(x)$  关于点  $(a,0)$  和  $x=b$  对称, 则  $T=$ \_\_\_\_\_;

5. (09 山东理 16) 已知定义在  $\mathbb{R}$  上的奇函数  $f(x)$  满足  $f(x-4)=-f(x)$ , 且在区间  $[0,2]$  上是增函数.  
若方程  $f(x)=m(m>0)$  在区间  $[-8,8]$  上有四个不同的实根  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , 则  $x_1+x_2+x_3+x_4=$ \_\_\_\_\_.

简要答案 -8

6. (97 全国文 7)  $f(x)$  定义在  $\mathbb{R}$  上, 则函数  $y=f(x-1)$  与  $y=f(1-x)$  的图像关于 ( )
- A. 直线  $y=0$  对称      B. 直线  $x=0$  对称      C. 直线  $y=1$  对称      D. 直线  $x=1$  对称

简要答案 D

【真题实战】

1. 已知  $f(x)$  在  $(8, +\infty)$  上递减且  $y = f(x+8)$  为偶函数, 则 ( )

A.  $f(6) > f(7)$       B.  $f(6) > f(9)$       C.  $f(7) > f(9)$       D.  $f(7) > f(10)$

简要答案 D

2. (13 安徽文 14) 定义在  $\mathbb{R}$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(x+1) = 2f(x)$ ,  
若当  $0 \leq x \leq 1$  时,  $f(x) = x(1-x)$ , 则当  $-1 \leq x \leq 0$  时,  $f(x) =$ \_\_\_\_\_.

简要答案  $-\frac{1}{2}x(x+1)$

3. (2010 重庆理 15) 已知函数  $f(x)$  满足  $4f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ ,  $f(1) = \frac{1}{4}$ , 则  $f(2010) =$ \_\_\_\_\_.

简要答案  $\frac{1}{2}$

4. (2013 新课标 I 理 16) 若函数  $f(x) = (1-x^2)(x^2+ax+b)$  的图像关于直线  $x = -2$  对称, 则  $f(x)$  的最大值是 \_\_\_\_\_.

简要答案 16

5. (2011 上海文 14) 设  $g(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上、以 1 为周期的函数, 若  $f(x) = x + g(x)$  在区间  $[0, 1]$  上的值域为  $[-2, 5]$ , 则  $f(x)$  在区间  $[0, 3]$  上的值域为 \_\_\_\_\_.

简要答案  $[-2, 7]$