

江苏省仪征中学 2022 届高三数学三月调研测试热身训练三

班级_____姓名_____学号_____得分_____

一、单选题：本大题共6小题，每小题5分，共计30分。每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的。

1.已知集合 $A = \{x | \log_2(x-1) < 0\}$, $B = \{x | x^2 - 3x - 4 < 0\}$, 则

- A. $A \cap B = A$ B. $A \cap B = B$ C. $(C_R A) \cap B = B$ D. $A \cap (C_R B) = A$

【答案】A

【解析】集合 $A = \{0 < x - 1 < 1\}$ 即 $A = \{1 < x < 2\}$, 集合 $B = \{-1 < x < 4\}$,

$\therefore C_R A = (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$, $C_R B = (-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$, $\therefore A \cap B = A$, A 正确

2.已知复数 z 满足 $zi^{2021} = 4i^{2022} - 3i^{2021}$, 则 $z =$

- A. $4 + 3i$ B. $4 - 3i$ C. $3 + 4i$ D. $3 - 4i$

【答案】C

【解析】 $\because z = 4i^{2022-2021} - 3i^{2023-2021} = 4i - 3i^2$

又 $\because i^2 = -1$

$\therefore z = 3 + 4i$

3.某校数学建模社团学生为了测量该校操场旗杆的高AB，先在旗杆底端的正西方点C处测得杆顶的仰角为45°，然后从点C处沿南偏东30°方向前进20m到达点D处，在D处测得杆顶的仰角为30°，则旗杆的高为

- A. 20 m B. 10 m C. $10\sqrt{3}m$ D. $\frac{10\sqrt{3}}{3}m$

【答案】B

【解析】设 $AB = x$, $\therefore BC = x$

$\therefore BD = \sqrt{3}x$, $CD = 20$,

过D作垂线垂足为H,

$\therefore DH = 10\sqrt{3}$, $CH = 10$, $BH = 10 - x$

所以由勾股定理得 $x = 10$

4. 已知函数 $f(x) = e^x - e^{-x} + \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$ ，则不等式 $f(x) + f(2x - 1) > 0$ 的解集是

- A. $(1, +\infty)$ B. $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ C. $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$ D. $(-\infty, 1)$

【答案】B

$$\because f'(x) = 2e^x + \frac{1 + 2\sqrt{x^2 + 1}}{2(x^2 + 1) + 2x\sqrt{x^2 + 1}} > 0$$

【解析】 $\therefore f(x) + f(2x - 1) > 0$ 等价于 $x > 1 - 2x$

$$\therefore x > \frac{1}{3}$$

5. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别 F_1, F_2 ， P 为椭圆上一点，且

$\angle F_1 P F_2 = \frac{\pi}{3}$ ，若 F_1 关于 $\angle F_1 P F_2$ 平分线的对称点在椭圆 C 上，则该椭圆的离心率为

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{3}$

解析： $\because F_1$ 关于 $\angle F_1 P F_2$ 平分线的对称点 M 在椭圆 C 上，

$\therefore P, F_1, M$ 三点共线

$$\therefore \text{令 } |PF_1| = m, |PM| = |MF_1| = m$$

$$\text{又 } \because |PF_1| + |PM| + |MF_1| = 4a = 3m$$

$$\therefore |PF_1| = \frac{4}{3}a, |PF_2| = \frac{2}{3}a$$

$$\text{由余弦定理可得 } |PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1||PF_2|\cos 30^\circ = |F_1F_2|^2$$

$$\therefore a^2 = 3c^2$$

$$e = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

6. 已知三棱锥 $P - ABC$ 的外接球半径为 4，底面 ABC 中， $AC = 6$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ，则三棱锥 $P - ABC$ 体积的最大值是

- A. $18\sqrt{3}$ B. $54\sqrt{3}$ C. 24π D. $\frac{16\sqrt{3} + 24}{3}$

【答案】A

【解析】在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理可知 $36 = AC^2 = BA^2 + BC^2 - BA \cdot BC \geqslant BA \cdot BC$ ，则

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC \cdot \sin \angle ABC \leq 9\sqrt{3}, \triangle ABC \text{ 外接圆的半径 } R = \frac{AC}{2 \sin \angle ABC} = 2\sqrt{3},$$

外接球球心到底面的距离 $h = \sqrt{16 - 12} = 2$,

$$\text{则 } V_{P-ABC} \leq \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot (2 + 4) = 18\sqrt{3}, \text{ 选 A}$$

二、多项选择题：本题共2小题，每小题5分，共10分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得5分，部分选对的得3分，有选错的得0分.

7.已知 m , n 是两条不同的直线, α , β 是两个不同的平面, 则

A.若 $m \parallel n$, $n \subset \alpha$, 则 $m \parallel \alpha$

B.若 $m \perp n$, $n \subset \alpha$, 则 $m \perp \alpha$

C.若 $m \perp \alpha$, $n \perp \alpha$, 则 $m \parallel n$

D.若 $m \parallel \alpha$, $m \parallel \beta$, $\alpha \cap \beta = n$, 则 $m \parallel n$

【答案】CD

【解析】 A . 缺少 $m \not\subset \alpha$, 错误; B . 线面垂直判定需要一条直线垂直面内两条相交直线, 错误; CD . 正确;

8.正弦信号是频率成分最为单一的一种信号, 因为这种信号的波形是数学上的正弦函数而得名, 很多复杂的信号都可以通过多个正弦信号叠加得到, 因而正弦信号在实际中作为典型信号或测试信号获得广泛应用. 已知某个信号的波形可以表示为 $f(x) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$, 则

A. $f(x)$ 的最大值为 3

B. π 是 $f(x)$ 的一个周期

C. $f(x)$ 的图像关于 $(\pi, 0)$ 对称

D. $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增

【答案】C

【解析】 A. $f(x) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x \leq 3$, 则 $\sin x = \sin 2x = \sin 3x = 1$, 但不能同时取等, 错误;

B. $f(x + \pi) = \sin(x + \pi) + \sin(2x + 2\pi) + \sin(3x + 3\pi) = -\sin x + \sin 2x - \sin 3x \neq f(x)$, 错误;

C. $f(2\pi - x) = \sin(2\pi - x) + \sin(4\pi - 2x) + \sin(6\pi - 3x) = -\sin x - \sin 2x - \sin 3x$,

则 $f(2\pi - x) + f(x) = 0$, 正确;

D. $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, 错误;

三、填空题：本大题共4小题，每题5分，共20分.不需写出解答过程，请把答案直接填写在答题卡相应位置上.

9.已知 $\left(\sqrt{x} - \frac{3}{x}\right)^n$ 的展开式中第3项为常数项，则这个展开式中各项系数之和为_____.

【答案】64

【解析】 $T_3 = C_n^2 (\sqrt{x})^{n-2} \left(-\frac{3}{x}\right)^2 = 9C_n^2 x^{\frac{n-3}{2}}$ ，则 $\frac{n}{2} - 3 = 0, n = 6$ ，令 $x = -1$ ，

可得各项系数之和为64.

10.写出一个满足 $\tan 20^\circ + 4 \cos \theta = \sqrt{3}$ 的 $\theta =$ _____.

【答案】 70° (答案不唯一)

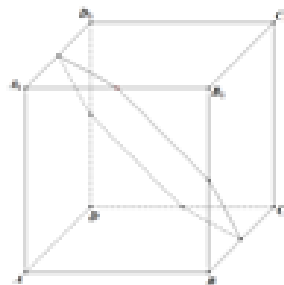
【解析】 $4 \cos \theta = \sqrt{3} - \tan 20^\circ = \tan 60^\circ - \tan 20^\circ = \frac{\sin 60^\circ \cos 20^\circ - \cos 60^\circ \sin 20^\circ}{\cos 60^\circ \cos 20^\circ}$
 $= \frac{2 \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} = 4 \sin 20^\circ = 4 \cos 70^\circ$ ，可取 $\theta = 70^\circ$.

11.已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为2， $AC_1 \perp$ 平面 α ，当平面 α 过点 B_1 时，平面 α 截此正方体所得截面多边形的面积为_____.当平面 α 过线段 BC 中点时，平面 α 截此正方体所得截面多边形的周长为_____.

【答案】 $2\sqrt{3}; 6\sqrt{2}$.

【解析】当 α 过点 B_1 时，截面为 CB_1D_1 ，面积为 $2\sqrt{3}$

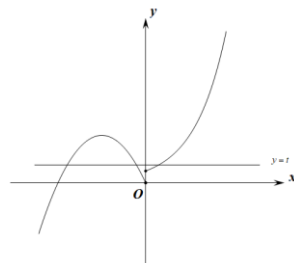
当 α 过点 BC 中点时，截面为边长为 $\sqrt{2}$ 的正六边形，周长为 $6\sqrt{2}$.



12.函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - t, & x \geq 0 \\ -x^2 - 4x - t, & x < 0 \end{cases}$ 有三个零点 x_1, x_2, x_3 且 $x_1 < x_2 < x_3$ ，则 $x_1 x_2 x_3$ 的取值范围是_____.

【答案】 $[0, 8)$

【解析】即 $t = g(x) = \begin{cases} 2^x, & x \geq 0 \\ -x^2 - 4x, & x < 0 \end{cases}$ 有三个解，



作出函数 $g(x)$ 的图像如图所示，则 $1 \leq t < 4$ ， x_1, x_2 为方程 $x^2 + 4x + t = 0$ 的两根，

则 $x_1 x_2 = t$; $2^{x_3} = t$, 则 $x_3 = \log_2 t$, 则 $x_1 x_2 x_3 = t \log_2 t = \frac{t \ln t}{\ln 2}$, 设 $g(t) = \frac{t \ln t}{\ln 2}$, $g'(t) = \frac{1 + \ln t}{\ln 2} > 0$,

则函数 $g(t)$ 在 $[1, 4)$ 上单调递增, 则 $x_1 x_2 x_3 = g(t) \in [0, 8)$.

四、解答题：本大题共4小题，共46分.请在答题卡指定区域内作答.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

13. (满分10分)

在① $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B}$; ② $\frac{a^2}{\tan A} = \frac{b^2}{\tan B}$ 这两个条件中任选一个，补充在下面问题中并作答.

已知在锐角 $\triangle ABC$ 中，角 A ， B ， C 的对边分别为 a ， b ， c ，_____.

(1) 判断 $\triangle ABC$ 的形状：

(2) 在 (1) 的条件下，若 $\cos A = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ， $b = 10$ ， AD 为 BC 边上的中线，求 AD 的长.

解：(1) 若选①，在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ 得， $\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$.

因为 $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B}$ ，所以 $\frac{a}{b} = \frac{\cos A}{\cos B}$ ，所以 $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\cos A}{\cos B}$ ，.....2 分

所以 $\tan A = \tan B$ ，又因为在锐角 $\triangle ABC$ 中，所以 $A = B$ ，

所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.4 分

若选②，在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ 得， $\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$.

因为 $\frac{a^2}{\tan A} = \frac{b^2}{\tan B}$ ，所以 $\frac{a^2}{b^2} = \frac{\tan A}{\tan B}$ ，

所以 $\frac{\sin^2 A}{\sin^2 B} = \frac{\tan A}{\tan B} = \frac{\sin A \cos B}{\cos A \sin B}$ ，.....2 分

所以 $\sin A \cos A = \sin B \cos B$ ，所以 $\sin 2A = \sin 2B$

又因为在锐角 $\triangle ABC$ 中，所以 $A = B$ ，

所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.4 分

(2) 由 (1) 知， $A = B$ ，所以 $\cos A = \cos B = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ， $a = b = 10$.

又因为在锐角 $\triangle ABC$ 中， $\sin A = \sin B = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

在 $\triangle ABC$ 中， $A + B + C = \pi$ ，

所以 $\sin C = \sin(\pi - 2A) = \sin 2A = 2 \sin A \cos A = \frac{4}{5}$6 分

在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ 得,

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{10 \times \frac{4}{5}}{\frac{2\sqrt{5}}{5}} = 4\sqrt{5}. \quad \text{.....8 分}$$

因为 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$,

$$\text{故 } \overrightarrow{AD}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2 + 2 \times \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2) = \frac{1}{4}((4\sqrt{5})^2 + 2 \times 4\sqrt{5} \times 10 \times \frac{\sqrt{5}}{5} + 10^2) = 65,$$

所以 $AD = \sqrt{65}$10 分

14. (满分12分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 其前 n 项和为 S_n , 且 $a_1 = 2$, $\log_2 a_{n+1} = \log_2(a_n + 1) + 1$.

(1) 证明: 数列 $\{a_n + 2\}$ 是等比数列;

(2) 求数列 $\left\{ \frac{2^{n+2} - 2}{S_n S_{n+1}} \right\}$ 的前 n 项和.

解: (1) 因为 $\log_2 a_{n+1} = \log_2(a_n + 1) + 1 = \log_2(2a_n + 2)$, 所以 $a_{n+1} = 2a_n + 2$, 所以

$$a_{n+1} + 2 = 2(a_n + 2).$$

因为 $a_1 + 2 = 4$, 所以 $\frac{a_{n+1} + 2}{a_n + 2} = 2$, 所以数列 $\{a_n + 2\}$ 是等比数列.4 分

(2) 因为 $a_n + 2 = 4 \times 2^{n-1} = 2^{n+1}$, 所以 $a_n = 2^{n+1} - 2$,

$$\text{所以 } S_n = 4 \times \frac{1 - 2^n}{1 - 2} - 2n = 2^{n+2} - 2n - 4. \quad \text{.....6 分}$$

记数列 $\left\{ \frac{2^{n+2} - 2}{S_n S_{n+1}} \right\}$ 的前 n 项和为 T_n ,

$$\text{因为 } \frac{2^{n+2} - 2}{S_n S_{n+1}} = \frac{(2^{n+2} - 2n - 4) - (2^{n+3} - 2n - 6)}{(2^{n+2} - 2n - 4)(2^{n+3} - 2n - 6)} = \frac{1}{2^{n+2} - 2n - 4} - \frac{1}{2^{n+3} - 2n - 6},$$

$$\text{所以 } T_n = \frac{1}{2^3 - 6} - \frac{1}{2^4 - 8} + \frac{1}{2^4 - 8} - \frac{1}{2^5 - 10} + \cdots + \frac{1}{2^{n+2} - 2n - 4} - \frac{1}{2^{n+3} - 2n - 6}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+3} - 2n - 6}. \quad \text{.....12 分}$$

15.大气污染物 $PM_{2.5}$ （大气中直径小于或等于 $2.5\mu m$ 的颗粒物）的浓度超过一定的限度会影响人的身体健康. 为了研究 $PM_{2.5}$ 的浓度受汽车流量影响的程度, 某校数学建模社团选择了学校附近 5 个监测点, 统计每个监测点 24 h 内过往的汽车流量 (单位: 千辆), 同时在低空相同的高度测定每个监测点该时间段内的 $PM_{2.5}$ 的平均浓度 (单位: $\mu g/m^3$), 得到的数据如下表所示: 根据以上信息, 完成下列问题:

- (1)建立 $PM_{2.5}$ 的浓度关于汽车流量的一元线性回归模型;
- (2)我国规定空气中 $PM_{2.5}$ 的浓度安全标准为 24 h 平均浓度为 $75\mu g/m^3$. 该地为使 $PM_{2.5}$ 24h 平均浓度不超过 68.6, 拟对汽车流量作适当控制.请你根据本题数据估计汽车流量控制的最大值.
- (3)从 5 个监测点中抽取 3 个, 记 $PM_{2.5}$ 24 h 平均浓度不超过 68.6 的个数为 x , 求 h 的分布列和数学期望.

监测点编号	1	2	3	4	5
汽车流量	1.3	1.2	1.6	1.0	0.9
$PM_{2.5}$ 浓度	66	72	113	34	35

$$\hat{b} = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$$

解：（1）因为 $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i}{5} = 1.2$ ， $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^5 y_i}{5} = 64$ ，所以 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = 115$ ，

所以 $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 64 - 115 \times 1.2 = -74$ ，

所以 $\hat{y} = 115x - 74$3 分

（2）当 $\hat{y} = 68.6$ 时， $115x - 74 = 68.6$ ，解得 $x = 1.24$ 。

所以汽车流量控制的最大值为 24 h 内 1.24 千辆。6 分

（3） x 的取值为 1, 2, 3，

$$P(X=1) = \frac{C_2^2 C_3^1}{C_5^3} = \frac{3}{10}, \quad P(X=2) = \frac{C_2^1 C_3^2}{C_5^3} = \frac{3}{5}, \quad P(X=3) = \frac{C_3^3}{C_5^3} = \frac{1}{10},$$

所以 x 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

$$\text{所以 } E(X) = 1 \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{3}{5} + 3 \times \frac{1}{10} = \frac{9}{5}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

答：（1） $\hat{y} = 115x - 74$ ；（2）汽车流量控制最大值为 24 h 内 1.24 千辆。（3） x 的数学期望为 $\frac{9}{5}$

16. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左右焦点分别为

$F_1(-c, 0), F(c, 0)$ ，离心率为 e ，且点 $(e, 3), (\sqrt{2}, b)$ 都在双曲线 C 上。

（1）求双曲线 C 的标准方程；

（2）若 A, B 是双曲线 C 上位于 x 轴上方的两点，且 $AF_1 \parallel BF_1$ 。

证明： $\frac{1}{AF_1} + \frac{1}{BF_2}$ 为定值。

解：（1）因为点 $(e, 3), (\sqrt{2}, b)$ 都在双曲线 C 上，

$$\text{所以 } \frac{c^2}{a^4} - \frac{1}{b^2} = 1, \quad \frac{2}{a^2} - 1 = 1, \quad \text{解得 } a^2 = 1, \quad b^2 = 3, \quad c^2 = 4, \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{所以双曲线 } C \text{ 的标准方程 } x^2 - \frac{y^2}{3} = 1. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

（2）延长 BF_2 交双曲线 C 于 D ，因为 $AF_1 \parallel BF_2$ ，由对称性可知 $AF_1 = DF_2$ 。

$$\text{①当直线 } BD \text{ 斜率不存在时, } \frac{1}{AF_1} + \frac{1}{BF_2} = \frac{1}{DF_2} + \frac{1}{BF_2} = \frac{2}{3} \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

②当直线 BD 斜率存在时，设直线 BD 的方程为 $y = k(x - 2)$ 。

$$\text{由 } \begin{cases} x^2 - \frac{y^2}{3} = 1, \\ y = k(x - 2) \end{cases} \text{ 得 } (k^2 - 3)x^2 - 4k^2x + 4k^2 + 3 = 0.$$

设 $B(x_1, y_1)$, $D(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{4k^2}{k^2 - 3}$, $x_1 x_2 = \frac{4k^2 + 3}{k^2 - 3}$.

因为 $BF_2 = \sqrt{x_1^2 - 4x_1 + 4 + y_1^2} = \sqrt{x_1^2 - 4x_1 + 4 + 3x_1^2 - 3} = \sqrt{4x_1^2 - 4x_1 + 1} = 2x_1 - 1$, 同理得 $DF_2 = 2x_2 - 1$,

所以
$$\frac{1}{AF_1} + \frac{1}{BF_2} = \frac{1}{DF_2} + \frac{1}{BF_2} = \frac{1}{2x_1 - 1} + \frac{1}{2x_2 - 1} = \frac{2(x_1 + x_2) - 2}{4x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 1}$$

$$= \frac{2 \frac{4k^2}{k^2 - 3} - 2}{4 \times \frac{4k^2 + 3}{k^2 - 3} - 2 \times \frac{4k^2}{k^2 - 3} + 1} = \frac{6k^2 + 6}{9k^2 + 9} = \frac{2}{3}.$$

综上: $\frac{1}{AF_1} + \frac{1}{BF_2} = \frac{2}{3}$ 12 分